# BULLETIN

## DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

NANCY, IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT ET Cie.

# BULLETIN

DE LA

# SOCIÉTÉ DES SCIENCES

## DE NANCY

ANCIENNE SOCIÉTÉ DES SCIENCES NATURELLES DE STRASBOURG

FONDÉE EN 1828

Série II. — Tome X. — Fascicule XXIII

22e ANNÉE. — 1889

(AVEC PLANCHES ET FIGURES INTERCALÉES DANS LE TEXTE)

PARIS

BERGER-LEVRAULT ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS

5, Rue des Beaux-Arts, 5

*MÊME MAISON A NANCY*

1890

# SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

## BUREAU ET CONSEIL D'ADMINISTRATION

POUR L'ANNÉE 1889.

| | | MM. |
|---|---|---|
| Bureau | *Président,* | Haller. |
| | *Vice-président,* | Godfrin. |
| | *Secrétaire général,* | Hecht. |
| | *Secrétaire annuel,* | Chenut. |
| | *Trésorier,* | Held. |
| *Administrateurs* | | Schlagdenhauffen. |
| | | Bleicher. |
| | | Fliche. |

## LISTE DES MEMBRES

COMPOSANT LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

Arrêtée au 1er janvier 1889.

### I. MEMBRES TITULAIRES

INSCRITS PAR RANG D'ANCIENNETÉ.

1. Dr Schlagdenhauffen, directeur de l'École supérieure de pharmacie. 5 juillet 1859.
2. Dr Hecht ✻, professeur à la Faculté de médecine. 3 janvier 1865.
3. Dr Feltz ✻, professeur à la Faculté de médecine. 7 février 1865.
4. Dr Gross, professeur à la Faculté de médecine. 16 décembre 1868.
5. Dr Bleicher ✻, professeur à l'École supérieure de pharmacie. 7 juillet 1869.
6. Dr Beaunis ✻, professeur à la Faculté de médecine. 5 mai 1873.
7. Dr Bernheim, professeur à la Faculté de médecine. 5 mai 1873.
8. Dr Marchal, ancien chef de clinique à la Faculté de médecine. 5 mai 1873.
9. Dr Spillmann, professeur à la Faculté de médecine. 5 mai 1873.
10. Humbert, docteur en médecine. 30 juin 1873.

11. Delcominète, professeur suppl. à l'École supérieure de pharmacie. 5 janvier 1874.
12. Dr Friant, professeur à la Faculté des sciences. 19 janvier 1874.
13. Roussel, ancien professeur à l'École forestière. 16 mars 1874.
14. Fliche, professeur à l'École forestière 20 avril 1874.
15. Dr Lallement, professeur à la Faculté de médecine. 26 avril 1875.
16. Haller, professeur à la Faculté des sciences. 8 janv. 1877.
17. Bichat, doyen de la Faculté des sciences. 22 janvier 1877.
18. Dr Coze ✻, professeur à la Faculté de médecine. 7 mai 1877.
19. Le Monnier, professeur à la Faculté des sciences. 18 juin 1877.
20. Monal, pharmacien de 1re classe. 2 décembre 1878.
21. Gault, pharmacien de 1re classe. 6 janvier 1879.
22. Wohlgemuth, maître de conférences à la Faculté des sciences. 20 janvier 1879.
23. Dr Charpentier, profess. à la Faculté de médecine. 2 mars 1879.
24. Godfrin, prof. à l'École supér. de pharmacie. 24 novembre 1879.
25. Floquet, professeur à la Faculté des sciences. 19 janvier 1880.
26. Arth, chargé d'un cours à la Faculté des sciences. 19 janvier 1880.
27. Dr Koehler, chargé d'un cours à la Faculté des sciences. 2 février 1880.
28. Dr Macé, professeur à la Faculté de médecine. 1er mai 1880.
29. Dr Grandeau O✻, doyen honoraire de la Faculté des sciences. 15 juin 1880.
30. Dr Lemaire, professeur au Lycée. 15 juillet 1880.
31. Sadler, docteur en médecine. 1er décembre 1880.
32. Dumont, docteur en droit. 16 janvier 1881.
33. Kuntzmann, professeur au Lycée. 16 janvier 1881.
34. Jaquiné O✻, inspecteur général honoraire des ponts et chaussées. 16 janvier 1881.
35. Dr Garnier, professeur à la Faculté de médecine. 2 mars 1881.
36. Dr Stoeber, ancien chef de clinique à la Faculté de médecine. 15 mars 1881.
37. Volmerange ✻, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite. 15 mars 1881.
38. André, architecte. 1er mars 1882.
39. Blondlot, professeur adj. à la Faculté des sciences. 2 juin 1882.
40. Held, professeur à l'École supérieure de pharmacie. 2 juin 1882.
41. Henry, professeur à l'École forestière. 1er décembre 1882.
42. Dr Vuillemin, chef des travaux d'histoire naturelle médicale à la Faculté de médecine. 1er décembre 1882.
43. Hasse, ancien professeur à l'École normale d'instituteurs. 1er mars 1883.
44. Thouvenin, chargé de cours à l'École supérieure de pharmacie. 1er mars 1883.

45. Millot, ancien officier de marine, chargé d'un cours à la Faculté des sciences. 17 mai 1883.
46. A. de Metz-Noblat, homme de lettres. 3 juillet 1883.
47. Dr Bagnéris, professeur agrégé à la Faculté de médecine. 15 janvier 1884.
48. Brunotte, professeur agrégé à l'École supérieure de pharmacie. 15 février 1884.
49. Klobb, professeur agrégé à l'École supérieure de pharmacie. 15 février 1884.
50. Chenut, licencié ès sciences physiq. et naturelles. 18 juillet 1884.
51. Abbé Chevalier, licencié ès sciences, professeur à l'École Saint-Sigisbert. 1er décembre 1884.
52. Pérot ✻, intendant militaire en retraite. 16 janvier 1885.
53. Riston, licencié en droit. 16 janvier 1885.
54. Bertin, rentier. 16 janvier 1885.
55. Guntz, maître de conférences à la Faculté des sciences. 16 janvier 1885.
56. Dr Saint-Remy, licencié ès sciences naturelles. 16 janvier 1885.
57. Viller ✻, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite. 23 février 1885.
58. Dr Prenant, chef des travaux d'histologie à la Faculté de médecine. 4 mars 1885.
59. Calinon, chef de correspondance aux forges de Longwy. 1er mai 1885.
60. Pérot (A.), ancien élève de l'École polytechnique, docteur ès sciences physiques. 1er juin 1886.
61. Dr Nicolas, professeur agrégé à la Faculté de médecine. 16 février 1887.
62. Boppe, S.-Directeur de l'École forestière. 1er mars 1887.
63. Monal fils, pharmacien de 1re classe, licencié ès sciences. 1er mars 1887.
64. Villedon ✻, pharmac. en chef à l'hôpital militaire. 1er mars 1887.
65. Durand, professeur à l'École primaire supérieure. 1er mars 1887.
66. Bauer ✻, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1er mars 1887.
67. Mer, attaché à la Station de recherches de l'École forestière. 16 mai 1887.
68. Dr Guillemin ✻, médecin-major de 1re classe au 37e de ligne. 1er juillet 1887.
69. Dr Bucquoy ✻, médecin-major de 1re classe au 79e de ligne. 16 janvier 1888.
70. Barthélemy, homme de lettres. M. A. 17 mai 1883; M. T. 16 janvier 1888.
71. Liétard, licencié ès sciences physiques et naturelles. 16 janv. 1888.
72. Dr Rohmer, prof. agr. à la Faculté de médecine. 16 janvier 1888.

73. Rossfelder, pharmacien de 1re classe. 1er février 1888.
74. Dr Knœpfler, chef de clinique à la Fac. de médecine. 20 fév. 1888.
75. Bartet, inspecteur adjoint des forêts. 2 mars 1888.
76. Noël, pharmacien de 1re classe. 1er juin 1888.
77. Abbé Harmand, ancien professeur au Collège de la Malgrange. 16 juin 1888.

## II. MEMBRES ASSOCIÉS

INSCRITS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Jacquemin ✻, directeur honoraire de l'École supérieure de pharmacie de Nancy. M. T. 3 février 1857 ; M. A. 1er février 1888.
De Barquin, ingénieur municipal à Nancy. 1er mars 1887.
Berger-Levrault (Oscar) ✻, imprimeur à Nancy. 24 mars 1873.
Des Roberts (Maurice), à Nancy. 15 mai 1886.
Dupont, maître de forges à Pompey. 1er avril 1880.
Gaiffe, constructeur d'appareils de physique à Nancy. 28 janvier 1882.
Gouy de Bellocq, ancien officier d'état-major. 1er mars 1886.
Dr Herrgott ✻, professeur à la Faculté de médecine. 18 novembre 1878.
Dr Heydenreich, doyen de la Faculté de médecine. 18 nov. 1878.
Houbre, ingénieur des ponts et chaussées à Nancy. 18 novembre 1878.
Laederich (Ch.), manufacturier à Épinal. 16 janvier 1874.
Lallement (Léopold), ancien avoué à Nancy. 1er mars 1887.
Lang (B.), manufacturier à Nancy. 16 mars 1880.
Lang (R.), manufacturier à Nancy. 16 mars 1880.
Dr Langlois, médecin en chef à l'Asile de Maréville. 16 janvier 1881.
Langenhagen (de) ✻, manufacturier à Nancy. 2 mars 1874.
Lederlin ✻, doyen de la Faculté de droit de Nancy. 24 mars 1873.
Maringer, adjoint au maire de Nancy. 1er mars 1887.
De Montjoie, propriétaire à Villers-lès-Nancy. 2 mars 1888.
Norberg (J.) ✻, imprimeur à Nancy. 24 mars 1873.
Reeb, pharmacien à Strasbourg. 1er mars 1887.
Simonin (Henry), anc. colonel de l'armée territoriale. 15 février 1886.
Thomas (Philippe), médecin-vétérinaire en 1er au 10e régiment de hussards, à Nancy. 15 juillet 1885.
Dr Tourdes O ✻, doyen hon. de la Fac. de méd. de Nancy. 1er juin 1880.
Weinmann, pharmacien de 1re classe, à Reims. 2 mars 1888.
Wurtz (E.), membre de la Société de pharmacie de Paris. 1er mars 1887.

## III. MEMBRES CORRESPONDANTS

### *A*) NATIONAUX.

Bardy, pharmacien de 1re classe à Saint-Dié. 15 novembre 1880.
Belleville, colonel en retraite, à Toulouse. 18 mai 1874.

Dr Bœckel (Eugène) ✻, prof. agr. à l'ancienne Faculté de médecine de Strasbourg, chirurgien en chef de l'hôpital civil. M. T. 19 mars 1867.

Dr Bouchard ✻, professeur à la Faculté de médecine de Bordeaux. M. T. 2 juin 1869.

Brillouin, professeur à la Faculté des sciences de Toulouse. M. T. 16 janvier 1881. M. C. 15 novembre 1882.

Castan ✻, chef d'escadron d'artillerie. M. T. 5 juin 1866; M. C. 5 juin 1867.

Dr Christian, médecin en chef de la Maison nationale de Charenton. M. T. 22 janvier 1877.

Dr Collignon, médecin-major de l'armée. M. T. 9 juin 1879; M. C. 15 novembre 1881.

Daubrée C ✻, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur au Jardin des Plantes. M. A. 9 avril 1839; M. T. 5 avril 1842; M. C. août 1861.

Dr Engel, professeur à la Faculté de médecine de Montpellier. M. T. 5 mai 1875.

Dr Faudel, secrétaire de la Société d'histoire naturelle de Colmar (Haut-Rhin). 8 mai 1867.

Dr Fée ✻, médecin principal de l'armée. M. T. 19 février 1867.

Fiessinger, docteur en médecine à Oyonnax (Ain). 1er décembre 1881.

Flammarion, astronome et écrivain scientifique, à Paris. 4 nov. 1868.

François, inspecteur général des mines, à Paris. 9 juin 1868.

Gay, professeur au Lycée de Montpellier. M. T. 19 février 1867; M. C. 19 juillet 1871.

Grad, naturaliste, à Colmar (Haut-Rhin). 6 février 1869.

Dr Haro ✻, médecin principal de l'armée en retraite, à Montpellier. M. T. 16 avril 1877; M. C. 3 janvier 1881.

Heckel, prof. à la Faculté des sciences de Marseille. M. T. 21 fév. 1876.

Herrenschmidt, docteur en médecine à Strasbourg. 15 janv. 1867.

Hirsch, ingénieur des ponts et chaussées, à Paris. M. T. 5 mai 1873.

Hugueny ✻, ancien professeur à la Faculté des sciences de Marseille. M. T. 5 juillet 1859; M. C. en 1878.

Jouan, capitaine de vaisseau, à Cherbourg. 1er décembre 1863.

Jourdain, ancien professeur à la Faculté des sciences de Nancy, à Saint-Waast-la-Hogue (Manche). M. T. en 1877; M. C. 8 décembre 1879.

Keller, ingénieur des mines, à Paris. 19 juillet 1871.

Klein, pharmacien à Strasbourg. M. T. 4 juillet 1865.

Dr Kœberlé O ✻, professeur agrégé à l'ancienne Faculté de médecine de Strasbourg. M. T. 7 juillet 1857.

Dr Lortet, doyen de la Faculté de médecine de Lyon. Déc. 1868.

Mangin ✻, professeur au Lycée Louis-le-Grand, à Paris. M. T. 24 novembre 1879; M. C. 15 novembre 1881.

Dr Millardet, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux.
M. T. 5 mai 1869.

Dr Monoyer, professeur à la Faculté de médecine de Lyon.
M. T. 4 juillet 1865.

Muntz, ingénieur des chemins de fer de l'Est, à Paris. M. T. 5 mai 1873.

Pasteur C ✻, membre de l'Institut, ancien professeur à la Faculté des sciences de Strasbourg. M. T. 8 janvier 1850; M. C. 1854.

Quatrefages (A. de) O ✻, membre de l'Institut, professeur au Muséum, à Paris. 2 juin 1835.

Rœderer, ingénieur des ponts et chaussées. M. T. 5 mars 1877.

Saint-Loup, doyen de la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.
15 janv. 1867.

Dr Villemin ✻, ancien professeur au Val-de-Grâce. 4 août 1857.

Dr Wieger, ancien professeur à la Faculté de médecine de Strasbourg.
M. T. 9 juin 1857.

Dr Willemin O ✻, médecin-inspecteur des eaux de Vichy.
M. T. 8 mai 1867 ; M. C. 19 juillet 1871.

Willm, professeur à la Faculté des sciences de Lille. M. T. 8 mai 1867.

Dr Zeyssolff, ancien médecin cantonal à Strasbourg. M. T. 15 avril 1834; M. C. 10 mars 1873.

## *B*) ÉTRANGERS.

### Allemagne.

Bruch (Carl), professeur d'anatomie à Offenbach. 5 janvier 1864.

Geinitz (H. B.), prof. à l'École polytechnique de Dresde. 5 fév. 1868.

Ludwig, ingénieur civil à Darmstadt. 5 juillet 1859.

Nægeli, professeur de botanique à l'Université de Munich. 7 mai 1855.

Sandberger, professeur à l'Université de Würzbourg. 4 août 1856.

### Angleterre, Écosse, Irlande.

Collins (Matth.), professeur à Dublin. 2 juin 1869.

Hellier-Baily, paléontologiste, membre de la Commission géologique de l'Irlande. 4 mars 1868.

Moore (David), directeur du Jardin botanique de Dublin. 1er août 1865.

Dr Stirton (James), à Glasgow. 6 février 1869.

### Belgique.

Morren (Édouard), professeur de botanique à l'Université de Liège.
12 janvier 1859.

### Brésil.

Glaziou, directeur du Jardin botanique de Rio-Janeiro. 4 mars 1868.

**Portugal.**

BARBOZA-DUBOCAGE, membre de l'Académie royale de Lisbonne. 12 mars 1862.

O CASTELLO DA PAÏVA, membre de l'Académie royale de Lisbonne. 4 décembre 1866.

**Russie.**

KUTORGA, professeur à Saint-Pétersbourg. 4 juin 1855.

**Suède et Norvège.**

ARESCHOUG, professeur à l'Université d'Upsal. 11 janvier 1859.

**Suisse.**

FAVRE (Alph.), professeur de géologie à Genève. 2 décembre 1862.

# SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

## ANNÉE 1889

PREMIÈRE PARTIE

## PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES

*Séance du 14 janvier* 1889

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Bertin, Bichat, Bleicher, Brunotte, Fliche, Floquet, Guntz, Haller, Hecht, Held, Millot, Nicolas, Schlagdenhauffen, Volmerange, Vuillemin.

*Démissions.* — M. le Président annonce la démission, comme membre titulaire, de M. Grandeau, doyen honoraire de la Faculté des sciences, qui a quitté Nancy ; M. le Dr Guillemin, médecin-major de 1re classe, ayant quitté Nancy, donne sa démission de membre titulaire. Il est, sur sa demande, nommé membre correspondant.

M. Friant donne sa démission des fonctions de trésorier, qu'il a remplies depuis 1879.

La Société vote des remerciements à M. Friant pour les services qu'il a rendus pendant sa gestion.

*Élections.* — M. Bleicher fait un rapport verbal sur la candidature de M. Schlagdenhauffen, avocat à Nancy, et M. Wœlfflin, ancien capitaine du génie, à Nancy, qui sont élus à l'unanimité membres titulaires de la Société.

Il est procédé au renouvellement partiel du bureau.

Sont nommés : *vice-président,* M. Friant ; *trésorier,* M. Held ; *secrétaire annuel,* L. Chenut ; *membre du conseil d'administration,* M. Fliche.

Par suite de ces élections, le *Bureau de la Société pour l'année 1889* est constitué comme il suit :

*Président :* M. Haller.

*Vice-président :* M. Friant.

*Secrétaire général :* M. Hecht.

*Secrétaire annuel :* M. Chenut.

*Trésorier* : M Held.

*Membres du conseil d'administration :* MM. Beaunis, Schlagdenhauffen et Fliche.

COMMUNICATION.

Botanique. — M. Vuillemin communique les résultats de nouvelles observations sur les *tubercules radicaux des légumineuses.*

*Le Secrétaire annuel,*
Brunotte.

---

*Séance du 1er février 1889.*

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Barthélemy, Bleicher, Brunotte, Charpentier, Chenut, Dumont, Fliche, Floquet, Haller, Hasse, Hecht, Held, Henry, Mer, Millot, Nicolas, Pérot, Prenant, de Schauenbourg.

Le procès-verbal de la dernière séance est adopté.

*Correspondance.* — M. le Président donne lecture d'une lettre de M. Friant, qui donne sa démission de vice-président. L'ordre du jour appelle le vote pour l'élection de son successeur.

*Élection.* — M. Godfrin est élu vice-président de la Société pour l'année 1889.

M. le Président donne lecture : 1° d'une lettre de M. le Ministre de l'instruction publique conviant la Société à concourir à l'Exposition universelle de 1889 et demandant l'envoi des publications de la Société ; 2° d'une lettre du président de l'Académie de Stanislas, relative à un prix de 500 fr. pour un ouvrage de chimie appliquée, qu'elle décernera en 1890.

COMMUNICATIONS.

I. Anatomie. — M. Nicolas fait en son nom et au nom de M. Prenant une communication sur un *Cas de monstruosité chez un agneau nouveau-né.*

II. Chimie. — M. Held fait une communication sur *les modifications à apporter aux procédés généraux d'analyse élémentaire dans quelques cas particuliers.*

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

*Séance du 18 février 1889.*

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Barthélemy, Bleicher, Blondlot, Brunotte, Charpentier, Chenut, Chevalier, Fliche, Floquet, Godfrin, Guntz, Hal-

ler, Hasse, Hecht, Held, Henry, Liétard, Macé, Mer, Millot, Nicolas, Prenant, Riston, de Schauenbourg, Thouvenin, Volmerange, Vuillemin.

*Présentation.* — MM. Held et Haller posent la candidature, comme membre titulaire, de M. Ruttinger, pharmacien de 1re classe à Nancy.

L'ordre du jour appelle la discussion relative à la publicité de la Société, de plusieurs questions déjà soumises à l'examen d'un comité nommé à cet effet par la Société. Le comité fait les propositions suivantes :

I. Étendre l'échange des publications à de nouvelles sociétés avec lesquelles la Société n'était pas encore en relation. M. le Président invite les membres à en faire eux-mêmes la désignation.

M. Macé demande l'échange du Bulletin avec la Société zoologique de France. Un membre demande l'échange avec la Société botanique de Lyon. M. Nicolas donne les noms de plusieurs autres sociétés.

Il est décidé de remettre toute décision à une séance ultérieure pour permettre à tous les membres de faire connaître leurs désirs à ce sujet.

II. Envoyer le Bulletin à des revues périodiques françaises ou étrangères donnant le résumé de tous les travaux scientifiques récents. La Société adopte en principe cette innovation, et remet à une séance ultérieure la désignation des revues avec lesquelles on entrera en relations.

III. Suppression de la publication des comptes rendus dans la *Revue médicale de l'Est* à partir de 1890.

Après un échange d'observations, la Société décide d'opérer immédiatement la suppression de cette publication et prie M. le Secrétaire perpétuel de s'occuper des démarches à faire à ce sujet.

IV. Publication d'un Bulletin mensuel. Il ne remplacerait pas le Bulletin annuel, qui serait réservé aux publications *in extenso* et aux comptes rendus des séances. Cette publication mensuelle contiendrait un résumé de toutes les communications et se composerait, suivant les circonstances, d'une demi-feuille ou une feuille d'impression. On l'adopterait à titre d'essai pour 1889. Elle serait envoyée aux sociétés correspondantes. A chaque auteur, seraient attribués 25 exemplaires des numéros contenant leurs publications.

Cette proposition est adoptée. Plusieurs membres proposent de fixer un maximum d'étendue aux résumés. Plusieurs chiffres sont mis aux voix et finalement le maximum de trois pages est adopté pour chaque communication.

La Société reconnaît qu'il y a lieu de nommer à cet effet, dans la prochaine séance, un comité de publication. Elle décide que les membres devront apporter le résumé de leurs communications à la séance où elles seront faites devant la Société. Dans le cas de discussion sur

une communication, le secrétaire annuel en soumettra la rédaction aux membres qui y ont pris part.

M. Charpentier propose que les auteurs puissent joindre, à leurs frais, un maximum de deux planches au trait à leurs résumés. La Société adopte cette proposition. Les planches devront être hors texte.

COMMUNICATION.

Géologie. — M. Bleicher fait une communication sur le *remplissage d'une fissure dans le calcaire dolomitique des Vosges.*

M. Liétard rapporte quelques faits à l'appui des conclusions de M. Bleicher.

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

*Séance du 1er mars 1889.*

Présidence de M. Godfrin, vice-président.

*Membres présents :* MM. Bartet, Boppe. Charpentier, Chenut, Fliche, Godfrin, Held, Henry, Le Monnier, Liétard, Mer, Millot, Volmerange, Vuillemin, Wohlgemuth.

*Élection.* — M. Held fait un rapport sur la candidature de M. Ruttinger, pharmacien de 1re classe à Nancy, qui est élu à l'unanimité comme membre titulaire.

M. le docteur Lallement, professeur à la Faculté de médecine de Nancy, membre de la Société, étant décédé le 27 février, M. Godfrin s'associe aux regrets de tous et prononce l'allocution suivante :

« Messieurs, au moment même où nous sommes réunis, la tombe d'un de nos confrères, décédé il y a quelques heures, est ouverte.

Le Dr Edmond Lallement était membre titulaire de notre Société depuis 1875 ; mais il prit peu de part à ses travaux, il dépensait la grande activité dont il était doué et qui l'a épuisé à la force de l'âge, pour son cours de la Faculté de médecine et au sein des commissions municipales et du conseil d'hygiène, où il traitait avec une compétence particulière, que lui donnaient ses connaissances médicales, les questions de santé publique et d'enseignement populaire. Je ne m'arrêterai pas sur ces titres de Lallement à la considération publique ; l'émotion générale, à la nouvelle de sa mort prématurée, montre bien la place importante qu'il occupait dans l'estime et l'affection de ses concitoyens. D'ailleurs d'autres personnes retraceront bientôt, les unes la valeur du professeur et du médecin, d'autres les services éminents qu'il a rendus comme administrateur à sa ville natale. Je suis certain d'être l'interprète du sentiment de tous en associant notre Société au deuil universel que cause la mort de cet homme éminent et d'un si complet dévouement. »

L'élection d'un comité de publication, qui devait avoir lieu le 1er mars, est remise à la prochaine séance.

COMMUNICATIONS.

Botanique. — 1° M. VUILLEMIN fait une communication sur les *tumeurs bactériennes des végétaux* et la *maladie du pin d'Alep comparée à celle de l'olivier*.

2° M. LE MONNIER présente, au nom de M. l'abbé Harmand, des *observations sur la Flore lichénique de la Lorraine*.

*Le Secrétaire annuel,*
H. CHENUT.

---

*Séance du 16 mars 1889.*

Présidence de M. HALLER.

*Membres présents :* MM. Bartet, Barthélemy, Bleicher, Boppe, Chenut, Fliche, Floquet, Godfrin, Haller, Hecht, Le Monnier, Liétard, de Metz-Noblat, Mer, Millot, Nicolas, Pérot, Prenant, Vuillemin.

Le procès-verbal de la dernière séance est lu et adopté.

*Élection d'un comité de publication.* — La Société décide que les membres du bureau feront partie de droit de ce comité. Elle décide ensuite qu'on adjoindra deux membres de la Société élus pour un an.

On procède au vote pour l'élection de ces deux membres. MM. Nicolas et Millot, ayant obtenu la majorité, sont élus membres du comité de publication pour l'année 1889.

COMMUNICATION.

Botanique. — M. Paul VUILLEMIN fait à la Société une communication sur la *maladie du peuplier pyramidal*.

Cette maladie parasitaire est due à la présence d'un *Didymosphæria* d'une espèce nouvelle, le *D. populina*. L'auteur décrit ce champignon, qui attaque les jeunes rameaux de la base de l'arbre et atteint finalement le sommet, qui dépérit. Des expériences de laboratoire ont démontré l'efficacité, comme moyen curatif, de l'emploi des solutions cupriques et de la sulfostéatite. L'élagage des rameaux inférieurs suffit pour atteindre le même but.

*Discussion.* — M. DE METZ-NOBLAT demande si l'on ne pourrait pas éviter les dégâts de ce champignon en prenant les boutures dans les branches hautes. M. VUILLEMIN et M. FLICHE croient qu'il suffit d'inspecter les rameaux avant le bouturage et de les désinfecter.

M. LE MONNIER voit dans cette communication la preuve que le bouturage réitéré n'a pas grand inconvénient et pense qu'il est bon qu'on sache que le parasite est la cause unique de la maladie. Dans le

Midi, où l'on élague sévèrement la base des peupliers, la maladie n'existe pas.

M. Boppe indique le foyer de la maladie, qui aurait d'abord apparu à Villers-lès-Nancy sur les peupliers de la route qui, de ce village, se dirige vers Maron.

M. Mer cite des peupliers portant des branches à partir du sol et qui sont tous malades, tandis que les voisins, qui sont élagués à leur base, sont indemnes.

M. Le Monnier donne à la Société, au nom de M. Lemaire, une suite au travail de ce dernier sur les *Desmidiées des Vosges*.

L'auteur a étudié les desmidiées des lacs et tourbières et celles des environs d'Étival. Il a reconnu 42 espèces inconnues dans les Vosges, dont deux nouvelles.

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

*Séance du 1er avril 1889.*

Présidence de M. Godfrin, vice-président.

La séance a lieu dans l'amphithéâtre de physique de la Faculté des sciences.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Barthélemy, Bertin, Bichat, Bleicher, Blondlot, Charpentier, Chenut, Chevalier, Dumont, Durand, Fliche, Friant, Godfrin, Hecht, Held, Liétard, Millot, Nicolas, Prenant, Schlagdenhauffen, Simonin, Volmerange, Vuillemin.

Le procès-verbal de la précédente séance est lu et adopté.

COMMUNICATIONS.

I. Anatomie. — M. Nicolas fait à la Société une communication sur l'*ossification de l'appareil hyoïdien.*

II. Géologie. — M. Chenut fait une communication sur l'*âge relatif de quelques roches vosgiennes*. Cette communication donne lieu à un échange d'observations entre M. Bleicher et l'auteur.

III. Physique. — M. Blondlot présente à la Société un *électromètre astatique* qu'il a fait construire en collaboration avec M. Curie. Cet instrument doit servir de wattmètre.

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

*Séance du 1er mai 1889.*

Présidence de M. HALLER.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Barthélemy, Bertin, Boppe, Charpentier, Chenut, Dumont, Durand, Fliche, Guntz, Haller, Hasse, Hecht, Macé, Le Monnier, Riboulot, Volmerange, Vuillemin, Wohlgemuth.

COMMUNICATIONS.

I. Botanique. — M. Paul VUILLEMIN fait à la Société une communication sur les *maladies parasitaires de la vigne* et présente à l'appui de nombreux échantillons.

II. Géologie. — M. CHENUT expose la suite de sa précédente communication sur l'*âge relatif de quelques roches vosgiennes.*

*Le Secrétaire annuel,*
H. CHENUT.

---

*Séance du 18 mai 1889.*

Présidence de M. HALLER.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Bertin, Blondlot, Barthélemy, Fliche, Guntz, Haller, Hecht, Klobb, de Metz-Noblat, Millot, Riston, Stoeber, Vuillemin, Volmerange.

COMMUNICATIONS.

I. Chimie. — M. GUNTZ expose les résultats de ses récentes recherches sur le sous-fluorure d'argent.

II. Paléontologie végétale. — M. FLICHE fait une communication sur ses *nouvelles recherches relatives aux tufs et tourbes de Villers-lès-Nancy.* M. Fliche rappelle que dans une précédente communication il a soumis à la Société les résultats d'une étude préliminaire faite par M. Bleicher et lui d'un ensemble de *tufs et de tourbes mis à découvert au château de Lasnez, près de Villers-lès-Nancy.* Depuis lors, de nouveaux travaux ont mis à découvert un tuf inférieur à la tourbe dans lequel se trouve un petit nombre d'empreintes végétales ; les espèces dont elles révèlent l'existence indiquent un climat plus froid encore que celles rencontrées dans la tourbe. A côté du *Populus tremula,* on y remarque, en effet, les *Salix nigricans* et *S. vagans Andesis.* Il y a là un point concordant avec ce qui, dans les mêmes conditions géologiques, a été observé en Suède, en Danemark et en Suisse, en même temps qu'un complément fort intéressant aux données fournies déjà par les fouilles de Lasnez à l'étude des diverses flores qui s'y sont succédé. L'auteur de la communication en rappelle sommairement les caractères, les rapports avec les flores similaires étudiées ailleurs ; il

remet à la Société, pour être imprimé dans le Bulletin, un travail d'ensemble sur le gisement de Lasnez et les débris soit animaux, soit végétaux qu'il contient.

III. Météorologie. — M. Millot présente une *carte de la répartition moyenne des pluies dans le département de Meurthe-et-Moselle.*

En présentant une carte, dressée par lui, relative à la répartition moyenne des pluies, M. Millot fait remarquer que, dans le département de Meurthe-et-Moselle, la hauteur de la couche pluviale tombée annuellement va en diminuant, d'une façon générale, du Sud au Nord et de l'Ouest à l'Est, ou, si on veut, du Sud-Ouest au Nord-Est. Si, d'autre part, on considère l'altitude des divers pluviomètres, on trouve que la quantité d'eau recueillie par chacun d'eux est, en moyenne, proportionnelle à sa hauteur au-dessus de la mer ; les exceptions à cette loi s'expliquent par la topographie locale.

La carte destinée au Bulletin n'est qu'un premier essai ; elle sera corrigée et complétée plus tard, quand la Commission météorologique aura pu multiplier ses pluviomètres et se trouvera en possession d'un plus grand nombre d'années d'observations.

*Discussion.* — M. de Metz-Noblat trouve une analogie entre la répartition des pluies indiquée par la carte et les trajectoires des orages telles que M. Millot les a indiquées dans une note précédente [1]. Il cite en particulier le cas du plateau d'Amance, qui reçoit peu d'eau pluviale malgré son altitude et qu'épargnent généralement les orages, ceux-ci étant divisés en deux par le plateau boisé de Haye, placé en avant par rapport aux vents pluvieux. Les neiges et les pluies d'hiver étant moins localisées que les averses orageuses, c'est à ces derniers que sont dues surtout les différences constatées entre les résultats fournis par deux pluviomètres voisins.

M. Millot trouve cette remarque fort juste. Le fait signalé par M. de Metz-Noblat se rattache aux causes qui influent sur l'inégale répartition des pluies, telles que l'altitude, l'orientation et l'inclinaison des versants par rapport aux vents pluvieux, la nature du tapis végétal et le degré de perméabilité du sol.

M. Guntz cite la ville de Brighton, sur les côtes d'Angleterre, comme étant fréquemment épargnée par les pluies et les orages, les nuages se séparant en avant d'elle pour passer à sa droite et à sa gauche.

IV. Botanique. — M. Vuillemin fait une communication sur une *déformation parasitaire des feuilles de coquelicots, comparée aux tubercules radicaux des légumineuses.*

La séance est levée à 5 heures et demie.

*Pour le Secrétaire annuel,*
Guntz.

1. Voir le *Bulletin de la Société des sciences*, p. xxxii et 26. 1883.

*Séance du 3 juin 1889.*

Présidence de M. HALLER.

*Membres présents :* MM. Barthélemy, Bichat, Bleicher, Blondlot, Dumont, Fliche, Haller, Hecht, Held, Henry, Klobb, de Metz-Noblat, Millot, de Schauenbourg, Stoeber, Villedon.

COMMUNICATIONS.

I. Balistique. — M. DE METZ-NOBLAT fait une communication sur le *tir des fusils de chasse*.

*Discussion.* — M. MILLOT présente quelques remarques sur la composition des boîtes à mitraille autrefois employées dans la marine, et rappelle que les balles qui les remplissaient étaient enduites d'une substance qui, pendant un certain temps, les maintenait réunies les unes aux autres.

M. BICHAT signale l'intérêt qu'il y aurait à inventer des cartouches dans lesquelles les plombs seraient maintenus rapprochés pendant une certaine portion de leur trajet.

M. DE METZ-NOBLAT pense que ce desideratum a été en partie rempli par le nouveau fusil anglais Shoke-bored, dont les avantages sont surtout dus à ce que les plombs restent réunis pendant quelques mètres au sortir de l'arme.

M. BLONDLOT rappelle les expériences intéressantes de Melsens, de Bruxelles, sur le tir des armes à feu.

II. Chimie. — M. HALLER fait une communication sur une *méthode nouvelle de synthèse d'acides* β *acétoniques de la série aromatique*.

*Pour le Secrétaire annuel,*
KLOBB.

---

*Séance du 15 juin 1889.*

Présidence de M. GODFRIN, vice-président.

*Membres présents :* MM. Bertin, Blondlot, Durand, Fliche, Floquet, Godfrin, Hecht, Henry, Liétard, de Schauenbourg, Simonin, Stoeber, Volmerange.

Sur la proposition de M. le Président, la Société adopte à l'unanimité l'échange du Bulletin de ses séances avec le *Bulletin des sciences* de la Société des naturalistes de Naples.

COMMUNICATIONS.

I. Optique. — M. STOEBER fait une communication sur les *modifications des verres de lunettes teintés*.

*Discussion.* — M. Blondlot propose de remplacer les verres épais et faiblement teintés par des verres beaucoup plus minces, à coloration très intense.

M. Godfrin demandant s'il ne serait pas possible de se servir de verres teintés seulement sur une de leurs faces, M. Blondlot répond que les verres ainsi colorés ne peuvent pas être fabriqués avec une perfection suffisante.

MM. Volmerange, Blondlot et Stoeber échangent en outre quelques observations.

II. Physique. — M. Blondlot fait une communication sur la *proposition de Maxwell* concernant l'action mécanique qui s'exerce entre des corps électrisés.

*Pour le Secrétaire annuel,*
Liétard.

---

*Séance du 1er juillet 1889.*

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Barthélemy, Bichat, Bleicher, Blondlot, Dumont, Durand, Fliche, Floquet, Haller, Hecht, Held, Guntz, Knœpfler, Millot, Riston, Schlagdenhauffen, de Schauenbourg, Simonin, Stoeber, Wœlfflin, Wohlgemuth.

COMMUNICATIONS.

I. M. Barthélemy fait l'analyse et donne lecture d'un chapitre de son travail sur la *Lorraine à l'époque quaternaire et aux débuts de l'époque actuelle.*

II. Mathématiques. — M. Floquet donne lecture de la préface d'une étude de M. Calinon, sur la *Cinématique à deux et à trois dimensions.*

III. M. Floquet fait une communication sur les *lignes de thalweg des paraboloïdes dans le cas où la concavité de ceux-ci est tournée vers le haut.*

*Pour le Secrétaire annuel,*
Held.

---

*Séance du 18 juillet 1889.*

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Bagnéris, Bleicher, Haller, Held, Fliche, Hecht, Floquet, Millot, Godfrin, Knœpfler, de Schauenbourg, Bertin, abbé Chevalier, Thouvenin, Wohlgemuth, Guntz, Barthélemy.

COMMUNICATIONS.

I. Géologie. — M. WOLGEMUTH fait une communication sur le *Callovien entre Toul et Neufchâteau.*

II. Chimie. — M. Guntz fait une communication sur la *détermination, par la méthode cryoscopique, des poids moléculaires de l'acide fluorhydrique et des fluohrydrites des fluorures.*

III. M. BLEICHER, en son nom et au nom de M. Millot, fait une communication *sur des roches polies et striées dues à d'anciens glaciers, découvertes aux environs de Remiremont.*

IV. Physique. — M. BAGNÉRIS fait une communication sur un procédé nouveau qui lui permet d'obtenir des *photographies du fond de l'œil.*

La séance se termine par une visite à la nouvelle bibliothèque de la Société.

*Pour le Secrétaire annuel,*
HELD.

---

*Séance du 15 novembre 1889.*

Présidence de M. HALLER.

*Membres présents :* MM. Barthélemy, Bleicher, Chenut, Dumont, Fliche, Guntz, Haller, Hasse, Hecht, Held, Henry, Knœpfler, Klobb, Le Monnier, de Metz-Noblat, Millot, Riston, de Schauenbourg, Stoeber, Thomas, Vuillemin, Wœlfflin.

*Correspondance.* — M. le Président annonce qu'il a reçu une lettre de M. le docteur Coze, professeur à la Faculté de médecine, qui donne sa démission de membre de la Société.

M. DE METZ-NOBLAT fait hommage à la Société d'une de ses récentes publications intitulée : *Maniement et usage des armes à feu.*

M. BARTHÉLEMY offre un ouvrage qui a pour titre : *Recherches archéologiques sur la Lorraine avant l'histoire.*

*Présentation.* — MM. THOMAS et BLEICHER présentent M. JOLY, vétérinaire en second au 10e hussards, à Nancy, qui sollicite son admission dans la Société comme membre associé.

COMMUNICATIONS.

I. Botanique. — M. VUILLEMIN fait une communication à propos de l'union symbiotique des champignons et des racines d'orchidées.

II. Archéologie. — M. BARTHÉLEMY expose le résultat de ses fouilles faites sur la butte Sainte-Geneviève (plateau de Malzéville).

III. Chimie. — M. HALLER fait une communication sur six bornylphénylurétanes isomères.

*Le Secrétaire annuel,*
H. CHENUT.

---

*Séance du 2 décembre 1889.*

Présidence de M. Haller.

*Membres présents :* MM. Barthélemy, Bertin, Bleicher, Blondlot, Boppe, Charpentier, Chenut, l'abbé Chevalier, Dumont, Fliche, Haller, Nicolas, Prenant, Thomas, Thouvenin, Vuillemin.

Le Secrétaire annuel donne lecture du procès-verbal de la précédente séance, dont la rédaction est adoptée.

*Admission.* — La Société procède au vote sur la candidature de M. Joly, vétérinaire en second au 10e hussards, présenté par MM. Thomas et Bleicher. A l'unanimité, M. Joly est élu membre associé.

La Société fixe la date de la séance générale annuelle au lundi 16 décembre et arrête l'ordre du jour de cette séance.

COMMUNICATIONS.

I. Histologie. — M. Nicolas fait une communication sur un *embryon humain monstrueux.*

II. Physique. — M. Blondlot donne le résultat de ses études sur une *loi élémentaire électro-magnétique.*

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

*Séance générale du 16 décembre 1889.*

Présidence de M. Haller.

La Société se réunit pour sa séance générale annuelle dans l'amphithéâtre de physique de la Faculté des sciences. Une très nombreuse assistance remplit cette salle, en outre des membres de la Société.

*Membres présents :* MM. Arth, Barthélemy, Bertin, Bichat, Bleicher, Blondlot, Brunotte, Charpentier, Chenut, abbé Chevalier, Fliche, Floquet, Guntz, Haller, Hasse, Hecht, Held, Klobb, Liétard, Nicolas, Prenant, Ruttinger, de Schauenbourg, Schlagdenhauffen, Saint-Remy, Wœlfflin, Vuillemin, Wohlgemuth.

COMMUNICATIONS.

I. Chimie. — M. Held fait une communication sur la *genèse de certains médicaments nouveaux et en particulier des hypnotiques.*

II. Physique. — M. Blondlot fait une communication sur les *expériences de Hertz et la théorie électro-magnétique de la lumière.*

*Le Secrétaire annuel,*
H. Chenut.

---

# SUR LE DÉDOUBLEMENT

# DES PARATARTRATES[1]

Par M. E. BICHAT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Tout le monde connaît aujourd'hui les immortels travaux de M. Pasteur sur la dissymétrie moléculaire, travaux qui ont été résumés par lui dans deux leçons publiées par la Société chimique de Paris, en 1861. Il résulte de ces recherches que tous les produits organiques cristallisables qui jouissent du pouvoir rotatoire moléculaire ont des formes cristallines hémiédriques, et que, par suite, l'action exercée sur la lumière polarisée se manifeste par une dissymétrie de forme qu'il est toujours plus ou moins facile de mettre en évidence. Guidé par ces premiers résultats, M. Pasteur, étudiant après Mitscherlich le paratartrate de soude et d'ammoniaque qui, en dissolution, ne jouit pas du pouvoir rotatoire, observa un fait qui avait échappé à son illustre devancier. Il constata que le paratartrate de soude et d'ammoniaque est hémiédrique comme tous les tartrates ; mais que les faces hémiédriques qui, dans le tartrate, ont toutes le même sens, s'inclinent tantôt à droite tantôt à gauche. Les cristaux hémièdres à droite et les cristaux hémièdres à gauche donnent en dissolution des rotations de sens contraire et égales en valeur absolue. Par le simple fait de la cristallisation, le paratartrate de

1. Une première communication, relative au même sujet, a été faite à la Société dans sa séance générale annuelle du 21 décembre 1887, sous le titre de : *Du rôle des poussières de l'air dans la cristallisation des composés inactifs*, d'après M. Pasteur.

soude et d'ammoniaque se dédouble donc en donnant des poids égaux de deux corps dissymétriques dont l'un est l'image de l'autre dans un miroir. Le paratartrate de soude et de potasse se dédouble également par la cristallisation de sa dissolution en cristaux de tartrate droit et de tartrate gauche.

Le nombre des paratartrates qui se dédoublent ainsi est très restreint. Ceux qui se dédoublent ont pour formule générale $C^4H^4O^6NaM$ ; M étant soit le potassium, soit l'ammonium, soit le rubidium. Cependant tous les paratartrates qui possèdent cette formule ne se dédoublent pas forcément. On peut citer comme exception le paratartrate dans lequel le métal associé au sodium est le thallium. Comment se fait-il que certains paratartrates se dédoublent en cristallisant et que d'autres, et ce sont les plus nombreux, ne se dédoublent pas ? M. Pasteur a laissé cette question sans réponse, lors de la publication de ses premiers travaux [1].

Dans une leçon sur la dissymétrie moléculaire, faite en janvier 1884 à la Société chimique de Paris, M. Pasteur a émis l'idée que le dédoublement des paratartrates et, en particulier, du sel double de soude et d'ammoniaque pourrait avoir pour origine la présence de poussières organiques dans la solution ou à la surface du cristallisoir.

M. Wyrouboff [2] combattit énergiquement l'hypothèse émise par M. Pasteur en se basant surtout sur les expériences de M. Scacchi [3], qui aurait montré, dès 1865, les conditions précises de dédoublement des paratartrates. M. Scacchi est arrivé, en effet, à empêcher le dédoublement du paratartrate de soude et d'ammoniaque tout simplement en effectuant la cristallisation de ce sel à une température supérieure à 28°. Au-dessous de cette température, le dédoublement s'effectue toujours ; au-dessus, on obtient du paratartrate de soude puis du sel de seignette, enfin du paratartrate de potasse. M. Scacchi a expliqué ces faits par la variation de solubilité, avec la température, du paratartrate de soude et d'ammoniaque, d'une part, et du tartrate droit ou gau-

1. Voir notamment *Leçons de chimie professées en* 1860 *à la Société chimique de Paris*.

2. *Bulletin de la Société chimique*, t. 41, p. 209, et t. 44, p. 53.

3. *Comptes rendus de l'Académie de Naples*, 1865.

che des mêmes bases, d'autre part. Il a montré que la solubilité des tartrates droit ou gauche croît beaucoup plus vite quand la température s'élève que celle du paratartrate. Partant de là, voici l'explication très simple donnée par M. Wyrouboff, d'après M. Scacchi. A une température inférieure à 28°, les tartrates droit ou gauche sont *moins* solubles que le paratartrate et le dédoublement s'effectue. A une température supérieure à 28°, le paratartrate est au contraire *moins* soluble que les tartrates droit ou gauche : le paratartrate cristallise seul et le dédoublement ne s'effectue pas.

M. Wyrouboff a pu de même obtenir, en opérant à une température voisine de zéro, des cristaux de paratartrate de soude et de potasse. Avec ce dernier sel il fait une expérience qu'il considère comme capitale. On prépare une dissolution sursaturée à $+4°$ ou $+5°$; on peut l'*ensemencer* indistinctement avec un cristal de paratartrate sodico-potassique ou avec un cristal de sel de seignette : on obtient l'un ou l'autre des deux sels, si l'on veut même, tous les deux à la fois. Entre 0° et $+3°$, un petit cristal de sel de seignette introduit dans la dissolution s'y dissout rapidement; un petit cristal de paratartrate produit une abondante cristallisation.

Se basant sur ces faits et sur d'autres observations relatives aux paratartrates de sodium et de thallium ou de rubidium, M. Wyrouboff a cru pouvoir poser les règles suivantes :

1° Tout sel paratartrique ayant une solubilité moindre que le sel tartrique correspondant doit se dédoubler;

2° Tout sel paratartrique plus soluble que le tartrate correspondant ne se dédouble pas;

Enfin, pour les paratartrates doubles, et ceci s'applique aux sels doubles de tous les acides possibles :

3° Lorsque les deux paratartrates simples qu'on fait cristalliser ensemble possèdent des solubilités très différentes, ils se déposent séparément. Pour avoir un sel double il faut alors augmenter la proportion du sel le plus soluble.

La solubilité étant fonction de la température, il est clair que ces règles ne s'appliquent pour chaque composé donné qu'à une température déterminée.

L'explication donnée par M. Wyrouboff est bien tentante ; elle semble clore définitivement la question. Cependant, comme le fait remarquer M. Pasteur, il est bien difficile d'expliquer par une simple différence de solubilité la formation de ces corps dissymétriques qui se forment dans la cristallisation du paratartrate de soude ou d'ammoniaque. Pourquoi la dissolution de ce sel dépose-t-elle des cristaux de deux sortes? Pourquoi donne-t-elle lieu à deux tétraèdres inverses ? Pourquoi l'existence de ces deux tétraèdres inverses et pourquoi pas l'octaèdre qui leur correspond, lequel octaèdre pourrait avoir la solubilité des cristaux tétraédriques ? Pour répondre à ces questions, il y avait lieu de rechercher si, comme le pense M. Pasteur, le dédoublement ne peut avoir lieu, tout au début de la cristallisation, que sous une influence de dissymétrie. C'est ce que j'ai essayé de faire en réalisant les expériences suivantes.

Après avoir préparé une dissolution de paratartrate double de soude et d'ammoniaque contenant un excès d'ammoniaque, j'en ai placé une partie dans une série de tubes que l'on fermait ensuite à la lampe. Après avoir chauffé ces tubes dans un bain de chlorure de calcium à une température de 118° on les a abandonnés à eux-mêmes dans une salle dont la température a varié, dans plusieurs expériences successives, de + 20° à — 4°. A côté, on a placé un cristallisoir largement ouvert contenant une partie de la même dissolution. Dès le lendemain, on trouva dans le cristallisoir des cristaux parfaitement dédoublés de tartrate droit et de tartrate gauche de soude et ammoniaque. La dissolution contenue dans les tubes resta pendant quelque temps sans cristalliser ; puis on vit se produire dans certains d'entre eux des aiguilles fines brillantes, groupées de manière à rayonner à partir d'un centre commun. Ces aiguilles étaient formées par du paratartrate d'ammoniaque. A côté, on vit se déposer bientôt d'autres cristaux de forme prismatique, durs et brillants. La plupart de ces derniers cristaux étaient constitués par du paratartrate de soude et ammoniaque, quelques-uns par du paratartrate de soude.

Pour reconnaître si les cristaux appartiennent à des tartrates ou à des paratartrates, on eut recours à la réaction bien connue des sels de calcium. Les cristaux observés au microscope se dis-

tinguent avec la plus grande netteté les uns des autres. Tandis que le paratartrate de chaux se présente sous la forme de poudre amorphe ou d'aiguilles fines, le tartrate de la même base affecte la forme de prisme portant sur les angles des bases les faces de l'octaèdre.

Pour que la dissolution de paratartrate de soude et d'ammoniaque cristallise sans dédoublement du sel, il n'est pas nécessaire de chauffer cette dissolution à une température aussi élevée que celle à laquelle on l'a soumise dans la première série d'expériences. On obtient encore des paratartrates en opérant de la manière suivante : on introduit la dissolution de paratartrate de soude et d'ammoniaque chauffée à une température d'environ 60° à 70° dans la branche fermée d'un tube en U qui a été lui-même chauffé et dont l'autre branche plonge dans un cristallisoir contenant de l'acide sulfurique. Au bout d'un temps plus ou moins long, et à la température ordinaire du laboratoire, il se dépose au fond du tube des cristaux présentant tous les caractères des paratartrates. La dissolution, dans cette expérience, avait été additionnée d'un grand excès de carbonate d'ammoniaque.

Enfin, si l'on met à cristalliser une dissolution de paratartrate double de soude et d'ammoniaque dans des tubes à essais simplement recouverts d'un tampon de coton flambé, et sans prendre d'autres précautions que celles que l'on a l'habitude de prendre lorsqu'on prépare des dissolutions sursaturées, on obtient encore, dans les conditions ordinaires de température du laboratoire, des cristaux de paratartrates non dédoublés.

De ces expériences, il faut conclure que le dédoublement du paratartrate double de soude et d'ammoniaque ne s'effectue jamais à la température ordinaire quand on opère à l'abri des poussières de l'air. Les cristaux qui prennent naissance dans ces conditions appartiennent toujours à des composés optiquement inactifs.

Il restait une question intéressante à résoudre. Les germes qui provoquent le dédoublement, que l'on observe toujours quand on opère en vase ouvert à une température inférieure à 28°, sont-ils d'origine organique ou d'origine minérale ? Pour essayer de résoudre ce problème, je plaçai une dissolution concentrée de paratartrate double de soude et d'ammoniaque dans une série de

vases de culture analogues à ceux qu'emploie M. Pasteur. Dans chacun de ces flacons, je déposai ensuite, au moyen d'un tube effilé, et en prenant les précautions ordinaires pour éviter l'introduction des germes en suspension dans l'air, une goutte de l'eau mère de la cristallisation d'une portion de la même dissolution abandonnée au contact de l'air. Cette dissolution, qui avait donné naissance à des cristaux nettement dédoublés, devait contenir le germe cherché qui, s'il était de nature organique, avait dû s'y développer. Or, dans les flacons ainsi ensemencés, on obtient toujours des cristaux de paratartrates non dédoublés, soit du paratartrate de soude, soit du paratartrate d'ammoniaque, soit du paratartrate de soude et ammoniaque, soit, la plupart du temps, un mélange de ces trois sels. Cette expérience, répétée plusieurs fois, conduisit toujours au même résultat. On peut en conclure que, selon toute probabilité, le germe n'est pas de nature organique.

Si, dans les mêmes flacons, on introduit soit un cristal de tartrate droit, soit un cristal de tartrate gauche, la cristallisation avec dédoublement s'effectue toujours. La présence présumable de parcelles extrêmement petites de ces cristaux dans les poussières en suspension dans l'air du laboratoire suffirait pour expliquer le dédoublement que l'on observe toujours quand la cristallisation a lieu à l'air libre.

L'expérience montre donc, de la façon la plus nette, que le contact de la dissolution de paratartrate de soude et ammoniaque avec les poussières de l'air est *indispensable* pour que la cristallisation s'effectue avec dédoublement.

Après la publication des faits ci-dessus relatés, M. Joubert[1] rappela une expérience qu'il avait faite autrefois et qui est de nature à les confirmer de la façon la plus complète. En faisant passer un courant d'air sec débarrassé des poussières atmosphériques dans une dissolution de paratartrate de soude et ammoniaque, on arrive fatalement à la cristallisation du sel dissous. Dans ces conditions on obtient, dans toutes les expériences, de magnifiques cristaux de paratartrate sans facettes hémiédriques,

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 102, p. 507.

d'une régularité parfaite et atteignant parfois plusieurs centimètres de côté.

Il semble, en présence des faits qui précèdent, que le dédoublement du paratartrate de soude et d'ammoniaque ne puisse être expliqué par une simple différence de solubilité et que les poussières de l'air, comme l'avait deviné M. Pasteur, jouent un rôle capital dans la formation des cristaux dissymétriques de tartrate droit et tartrate gauche des mêmes bases.

M. Wyrouboff[1] crut néanmoins pouvoir dire que les expériences que je viens de décrire ne sont point démonstratives. Il eût fallu, dit-il, désursaturer d'abord la dissolution enfermée dans les tubes en y introduisant un sel de seignette. Je m'en serais bien gardé; car, mettre la dissolution en contact avec un cristal de sel de seignette, c'est-à-dire un cristal de forme dissymétrique, revenait à y introduire cette force dissymétrique qui, d'après mes expériences, est nécessaire pour que le dédoublement s'opère. Il est vrai qu'à une température supérieure à 28°, on peut introduire un cristal de sel de seignette dans une dissolution de paratartrate sans obtenir le dédoublement du sel. Cela tient à ce que la solubilité joue ici un rôle prépondérant. A cette température, en effet, l'expérience montre qu'un cristal de tartrate droit ou de tartrate gauche se dissout immédiatement. Le germe nécessaire au dédoublement n'existant plus, la liqueur ne laisse déposer que des paratartrates, comme l'a démontré le premier M. Scacchi. D'ailleurs, pour le but que nous poursuivons en ce moment, il nous semble que le cas où la température est supérieure à 28° est relativement peu intéressant. Au-dessus de cette température, en effet, on n'obtient que des paratartrates. Or, tant qu'il ne s'agit que de paratartrates, c'est-à-dire de cristaux symétriques, on se trouve dans le cas des corps que l'on étudie généralement en chimie ; la solubilité doit intervenir et jouer un rôle capital dans la cristallisation. Les dissolutions des paratartrates se comportent absolument de la même manière que les solutions de tous les sels qui ne jouissent pas du pouvoir rotatoire : les sels les moins solubles se déposent les

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 102, p. 627.

premiers. C'est au-dessous de 28°, dans les limites de température où le dédoublement s'opère spontanément, qu'il est intéressant et utile surtout de chercher la cause de la formation de cristaux dissymétriques. C'est à ce moment que les poussières de l'air interviennent et que leur présence est *indispensable* à la production des cristaux droit et gauche. Si l'on supprime ces poussières, on n'obtient jamais, à *aucune température,* de cristaux dissymétriques. Sans elles, M. Pasteur n'aurait *jamais* pu observer ce fait fondamental du dédoublement du paratartrate de soude et d'ammoniaque.

M. Scacchi, sans s'en douter, il est vrai, avait d'ailleurs mis lui-même en évidence l'influence des poussières de l'air dans le dédoublement de certains paratartrates. Ce savant obtenait, en effet, la cristallisation du paratartrate sodico-ammonique dans des vases *recouverts d'une feuille de papier buvard et d'une lame de verre*. Tant que le cristallisoir restait dans ces conditions, il constatait invariablement, même à une température de beaucoup inférieure à 28°, la formation des paratartrates. Dans quelques expériences où il lui est arrivé de découvrir le cristallisoir, il a trouvé, au bout d'un certain temps, qu'il s'était formé des cristaux de tartrates droit et gauche. Le dédoublement s'est donc produit toutes les fois que la solution a été mise en contact avec les poussières de l'air à une température suffisamment basse. Ce résultat est parfaitement conforme aux faits que j'ai observés.

Enfin, on a pu objecter que mes expériences avaient été faites dans des vases clos, de capacité restreinte. J'ai levé cette dernière objection par l'expérience suivante, qui me paraît absolument démonstrative. Il arrive que, par suite de certains phénomènes naturels, une chute de pluie ou de neige par exemple, l'air se trouve débarrassé de la plus grande partie des poussières qu'il tient ordinairement en suspension. Si notre manière de voir est exacte, il doit arriver que, dans ces conditions, une dissolution de paratartrate ne se dédoublera pas même en cristallisant à l'air *libre*.

C'est en effet ce qui arrive. L'expérience a été faite à Lunéville pendant l'hiver 1886-1887.

Ayant préparé une dissolution concentrée de tartrate double de soude et d'ammoniaque, je la mis à cristalliser au milieu d'un

grand jardin, immédiatement après une forte chute de neige. On avait pris des précautions minutieuses pour éviter la présence de parcelles de tartrates, c'est-à-dire de germes dissymétriques soit sur les vases, soit sur les vêtements de l'opérateur. Dans ces conditions, la cristallisation qui s'effectuait rapidement, à une température voisine de zéro, n'a donné lieu qu'à des paratartrates.

L'explication de M. Wyrouboff et de ceux qui ont adopté sa doctrine est donc insuffisante. Il n'est pas permis d'appliquer aux corps dissymétriques comme les tartrates, les lois établies pour les composés symétriques que l'on fabrique dans les laboratoires.

L'exemple suivant le prouve d'une manière extrêmement nette.

Si l'on fait cristalliser une solution contenant un mélange de sulfate de soude et de sulfate de magnésie en proportions équivalentes aux poids moléculaires de ces deux sels, on observe des faits complètement différents, suivant que la température est supérieure ou inférieure à 21°,5.

Au-dessous de cette température, on obtient des cristaux séparés de sulfate de soude et de sulfate de magnésie. Au-dessus de 21°,5, on obtient une combinaison de ces deux sels qui a pour formule $(SO^4)^2\,MgNa, 4\,HO$, à laquelle on a donné le nom d'astrakanite [1].

L'explication de ce fait est des plus simples : elle repose sur la différence de solubilité de l'astrakanite et de ses parties constituantes à des températures supérieures ou inférieures à 21°,5. Au-dessus de 21°,5, l'astrakanite est moins soluble que le mélange des sels simples qui le constituent : il se dépose seul. Pour une température plus basse, ce sont les sulfates moins solubles que l'astrakanite qui cristallisent. Il était bien tentant d'étendre cette manière de voir au cas des paratartrates. C'est ce qu'a fait M. Wyrouboff. Il suffisait de remplacer le mot paratartrate par astrakanite et sulfate de soude et de magnésie par tartrate droit et tartrate gauche. Si cette manière très simple d'envisager les choses était exacte, on devrait trouver qu'en faisant cristalliser

1. J. H. Van T. Hoff et C. M. Van Deventer, *Berichte der deutschen Chem. Gesellschaft,* XIX, 2,142 et suiv., et *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas,* t. V, n° 5, p. 255 (1886).

un mélange de sulfate de soude et de magnésie, en proportion convenable pour former l'astrakanite, en vase clos, à l'abri des poussières de l'air, on obtient toujours de l'astrakanite, de la même façon qu'en faisant cristalliser dans les mêmes conditions un mélange à poids égaux de tartrate droit et de tartrate gauche, de soude et ammoniaque on obtient toujours le paratartrate des mêmes bases. Or, l'expérience montre qu'il n'en est rien. Si l'on dissout de l'astrakanite et si on place cette dissolution en vase clos, on trouve que les cristaux qui prennent naissance sont, non pas de l'astrakanite, mais un mélange de sulfate de soude et de sulfate de magnésie. Le dédoublement s'est effectué sans l'intervention des poussières de l'air. C'est qu'ici, en effet, il s'agit de la formation de corps symétriques et il n'est pas besoin, pour qu'ils prennent naissance, de l'intervention d'une force dissymétrique quelconque.

Dans la conférence faite en 1860 à la Société chimique de Paris, M. Pasteur faisait remarquer, pour la première fois, la différence profonde qui existe entre les produits artificiels comme le sulfate de soude et le sulfate de magnésie constituant l'astrakanite et les produits naturels comme l'acide tartrique et ses sels. Les premiers ne présentent aucune dissymétrie moléculaire et l'on ne saurait, disait M. Pasteur, indiquer l'existence d'une séparation plus profonde entre les produits nés sous l'influence de la vie et tous les autres. Jusqu'à présent, avec les procédés employés dans les laboratoires de chimie, on n'est pas parvenu à faire un corps possédant la dissymétrie moléculaire en partant des éléments minéraux ou de corps non dissymétriques.

M. Yungfleisch a essayé en partant de l'éthylène de faire la synthèse de l'acide tartrique; il n'a obtenu que de l'acide paratartrique, c'est-à-dire un composé inactif sans hémiédrie. Il n'est pas dissymétrique. Mes expériences démontrent que, pour le dédoubler, il est indispensable de faire intervenir dans la cristallisation d'un de ses sels un cristal de tartrate droit ou de tartrate gauche, c'est-à-dire un corps dissymétrique.

# NOTE

SUR LA

# RÉPARTITION MOYENNE DES PLUIES

DANS LE

## DÉPARTEMENT DE MEURTHE-ET-MOSELLE[1]

Par M. C. MILLOT

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

Le nombre des observations pluviométriques recueillies depuis dix ans par la Commission météorologique de Meurthe-et-Moselle permet de tenter une première étude de la répartition moyenne des précipitations aqueuses à la surface de notre département.

Sur les 36 stations munies de pluviomètres, 30 seulement figurent dans le tableau ci-après, qui a servi au tracé de la carte accompagnant cette note. Euvezin et Abaucourt ont dû être laissés de côté, le nombre de leurs observations étant insuffisant, et pour Nancy, nous avons réuni en un seul les chiffres fournis par la Faculté des sciences, la Station agronomique, l'École normale et le pontonnier de Sainte-Catherine, en prenant comme altitude et hauteur de pluie les moyennes des nombres relatifs à ces quatre stations.

1. Communication faite à la Société des sciences dans la séance du 18 mai 1889.

| Stations. | Altitude. | Hauteur de pluie. |
|---|---|---|
| | Mètres. | Millim. |
| Bayon | 250 | 863,2 |
| Baccarat | 267 | 857,0 |
| Moriviller | 322 | 832,1 |
| Allain | 307 | 831,8 |
| Cinq-Tranchées | 380 | 823,6 |
| Serres | 295 | 820,4 |
| Vézelise | 293 | 815,8 |
| La Malgrange | 234 | 808,8 |
| Maxéville | 225 | 805,3 |
| Neuves-Maisons | 218 | 796,0 |
| Bellefontaine | 240 | 791,7 |
| Blâmont | 263 | 779,9 |
| Flin | 251 | 777,4 |
| Nancy | 217 | 774,0 |
| Pexonne | 310 | 773,0 |
| Foug | 260 | 771,9 |
| Moncel-sur-Seille | 205 | 768,1 |
| Rogéville | 300 | 764,8 |
| Lunéville | 225 | 759,9 |
| Toul | 211 | 742,6 |
| Thiébauménil | 244 | 734,5 |
| Moyen | 295 | 731,4 |
| Frouard | 191 | 728,4 |
| Hussigny | 423 | 725,9 |
| Mance | 220 | 706,0 |
| Amance | 400 | 698,5 |
| Tomblaine | 200 | 694,1 |
| Parroy | 233 | 667,6 |
| La Bouzule | 240 | 663,7 |
| Einville | 225 | 614,6 |
| Altitude moyenne | 264,80 | |
| Hauteur moyenne de pluie | | 764mm |

Malheureusement les nombres qui figurent dans ce tableau ne présentent pas tous la même garantie. Non seulement il faut compter avec les erreurs d'observation qui ont toutes pour effet de diminuer la quantité d'eau mesurée; de plus, si pour une douzaine de stations la moyenne résulte des observations de dix années, pour les autres, elle n'est que le résultat de 8, 7, 6 et même, pour quelques localités, quatre années seulement. Aussi ne doit-on considérer ce travail que comme un essai qui devra être corrigé et complété plus tard.

Telle qu'elle est, la carte nous fait voir que, d'une façon générale, la pluie, dans notre département, va en diminuant du Sud au Nord et de l'Ouest vers l'Est, ou encore du Sud-Ouest au Nord-Est. Ce fait est bien d'accord avec la loi générale d'augmentation des précipitations aqueuses suivant l'altitude.

En effet, si nous prenons la moyenne des hauteurs des stations qui recueillent annuellement plus de 800 millimètres d'eau, nous trouvons 286 mètres au-dessus de la mer.

La moyenne altitude des stations qui reçoivent entre 800 et 750 millimètres d'eau est 249 mètres.

La moyenne altitude des pluviomètres qui recueillent une hauteur de pluie comprise entre 750 et 700 millimètres est 264 mètres. Ce nombre est en désaccord avec le principe énoncé plus haut; mais, parmi le groupe de stations considérées, se trouve Hussigny qui, avec une altitude de 423 mètres, ne reçoit que $725^{mm},9$ d'eau, anomalie dont il y aurait à rechercher les causes dans la topographie locale. Cette exception mise de côté, on trouve pour altitude moyenne des pluviomètres recevant entre 750 et 700 millimètres d'eau : $232^{m},2$, nombre qui rentre dans la règle générale.

Enfin, parmi les stations qui reçoivent moins de 700 millimètres d'eau, nous en trouvons encore une qui fait exception à la règle : c'est Amance qui, à 400 mètres au-dessus de la mer, ne reçoit que $698^{mm},5$ d'eau, fait dû sans doute à ce que le plateau d'Amance, déboisé, se trouve placé sous le vent du massif forestier de Haye, de même altitude, par rapport aux vents pluvieux du Sud-Ouest. En laissant de côté cette localité, nous trouvons pour altitude moyenne des pluviomètres qui reçoivent moins de 700 millimètres d'eau : $224^{m},5$, nombre inférieur à celui du groupe précédent.

Mais l'altitude n'intervient pas seule; l'orientation et l'inclinaison des versants par rapport aux vents pluvieux, la nature géologique du sol au point de vue de son degré de perméabilité, le tapis végétal qui le recouvre, ont aussi une grande influence dont l'étude ne pourra être abordée avec fruit que quand nous posséderons des observations plus nombreuses. Elle fournira certainement l'explication de toutes les irrégularités dans la chute des eaux météoriques.

La carte nous fait voir aussi quelles sont les lacunes à combler

dans la distribution des pluviomètres à la surface du département, afin d'arriver à une plus grande approximation. Ainsi, l'absence de poste d'observation aux environs du confluent du Sanon et de la Meurthe nous empêche de savoir si le minimum de pluie Amance-Tomblaine-La Bouzule se relie à celui de Parroy-Einville par un isthme au sud du maximum de Serres, ou bien si, au contraire, le maximum de Serres se relie avec ceux de Bayon et de la forêt de Haye.

Peut-être aussi le minimum Amance-La Bouzule s'étend-il le long de la Seille jusqu'à Nomeny ; un pluviomètre récemment installé dans cette dernière localité nous renseignera sur ce sujet.

Enfin, quand les ressources de la Commission météorologique le permettront, il sera très utile, pour compléter notre réseau pluviométrique, de créer une station dans le canton de Conflans, au sud de cette ville, dans la partie étranglée du département ; une autre dans celui de Longuyon, à l'extrémité nord-ouest ; une dernière enfin vers le Donon, où certainement la précipitation doit être plus abondante que ne l'indique notre carte provisoire.

Dans quelques années nous espérons reprendre ce travail avec des données plus complètes.

# DÉPARTEMENT DE MEURTHE-&-MOSELLE

Carte provisoire de la distribution moyenne des pluies.

dressée par C. Millot, en 1888.

BELGIQUE

Chiers

Gd Dché DE LUXEMBOURG

ALSACE-LORRAINE

MEUSE

VOSGES

DIRECTION DES VOSGES

Longwy

Thiaucourt

Longuyon

Audun-le-Roman

THIONVILLE

Forêt de Moyeuvre

Mance 220

BRIEY

Conflans

METZ

Seille

Pont-à-Mousson

Nomeny

Thiaucourt 213

Eurezin

Rogeville 300

Pannevre en Haye

COMMERCY

Trouard 181

Amance 400

Moncel-sur-Seille 205

La Bourdue 240

CHATEAU-SALINS

Vic

SARREBOURG

Bois de Haye

Belefontaine

Maxonville 227

NANCY

Foug 260

TOUL 211

Fomblaine 200

Arracourt 198

Serres

Parroy 222

Saxon

Lay

Les Trois Maisons

La Malgrange

St Nicolas

Nves Maisons 218

Einville

Forêt de Parroy

LUNEVILLE 228

Thiebauménil 244

Vezouse

Blâmont 263

Cirey

Forêt de Mondon

Allain 307

Colombey

Vézelise 293

Haroué

Bayon 250

Gerbeviller 235

Moyen

Flin 281

Marmdler 322

Baccarat 267

Ceramu 310

Vorion 1040

NEUFCHÂTEAU

Aboncourt 219

Mirdon

MIRECOURT

Moselle

Mortagne

Meurthe

EPINAL

ST DIÉ

## Légende.

Hauteur de pluie :

- moins de 700 m.m
- entre 700 et 750 m.m
- entre 750 et 800 m.m
- plus de 800 m.m

N.B. *Les nombres inscrits auprès des noms de localités indiquent l'altitude du pluviomètre au dessus de la mer.*

Autog. A. Barbier. Quai Choiseul 4. Nancy.

# OBSERVATIONS

RELATIVES A

# LA FLORE LICHÉNIQUE

## DE LA LORRAINE[1]

Par M. l'Abbé HARMAND

ANCIEN PROFESSEUR AU COLLÈGE DE LA MALGRANGE, PRÈS NANCY

Dans mes nombreuses excursions lichéniques, j'ai eu la bonne fortune de rencontrer quelques espèces nouvelles, certaines variétés ou formes intéressantes non encore signalées, soit en Lorraine, soit dans le département de la Meurthe, du moins d'après les documents suivants, les seuls qui soient à ma connaissance : 1° *Catalogue des lichens du département des Vosges,* par le Dr Mougeot ; *Statistique du département des Vosges,* Nancy, 1845, p. 414 ; 2° *Catalogue des lichens du département de la Meurthe,* par le Dr Godron ; *Statistique du département de la Meurthe,* Nancy, 1843, p. 191 ; 3° *Catalogue des lichens du département des Vosges,* par le Dr Berher ; *Le département des Vosges,* Épinal, 1887, 3e volume. Je demande à la Société des sciences la permission de lui faire part de ces nouveautés et de lui communiquer en même temps quelques remarques sur un petit nombre d'espèces.

On trouvera sans doute que, pour six années de recherches, mon contingent de découvertes est bien modeste. Je le reconnais volontiers ; mais, que l'on veuille considérer que je suis venu après Mougeot et Godron. Ces moissonneurs infatigables ont bien

1. Communication faite dans la séance du 1er mars 1889.

laissé, çà et là, quelques rares épis; mais, ce ne sont que des épis isolés et nous ne pouvons, tout au plus, aujourd'hui, que glaner péniblement.

J'ai encore, il me semble, une autre bonne excuse dans la disette presque entière où je me trouve de collaborateurs. A part M. l'abbé Hue, vice-président de la Société botanique de France, qui a habité la Lorraine pendant plusieurs années, et dont on retrouvera souvent le nom plus bas ; à part aussi quelques amis qui poussent le dévouement jusqu'à recueillir, presque au hasard, ce qu'ils rencontrent dans leurs promenades, personne, jusqu'ici, ne m'est venu en aide. Toutes les portes auxquelles j'ai frappé et qui semblaient devoir s'ouvrir tout d'abord, sont demeurées fermées.

Il va sans dire que je n'entends parler ici que des explorateurs et des chercheurs ; car, pour le travail de la détermination, je ne crois pas qu'il me reste rien à désirer.

M. l'abbé Hue a fait pour moi, sous ce rapport, ce que peut faire seul le meilleur des amis. Quel courage, quelle patience et quelle abnégation il faut pour examiner, comme il le fait, des centaines d'exemplaires douteux, souvent bien imparfaits et fort peu attrayants !

De plus, M. Le Monnier, de la Faculté des sciences, outre les encouragements qu'il n'a cessé de me donner sous la forme du plus bienveillant accueil, a mis obligeamment à ma disposition plusieurs collections précieuses et un certain nombre d'ouvrages que je n'aurais pu me procurer.

Pour revenir aux explorateurs, il me semble que si l'on parvenait à faire disparaître des esprits certains préjugés, les lichens ne seraient pas négligés comme ils l'ont été, hélas ! depuis Mougeot. C'est trop difficile, dit-on, je n'y entends rien ; je serais trop longtemps pour m'y mettre ; et puis, le microscope me fait mal aux yeux et à la tête.

Neuf fois sur dix, ces prétextes ne sont que la traduction d'un préjugé des plus erronés.

L'étude des lichens est trop difficile, dites-vous ? Écoutez la réponse de quelqu'un dont vous ne récuserez ni l'autorité ni la compétence. « Il est rare de trouver des botanistes qui possèdent

« la connaissance exacte et détaillée de ces végétaux. Cela vient « surtout de la rareté des bons ouvrages et de la *fausse opinion* « où l'on est que la Lichénologie est remplie de difficultés. En « réalité, cette science, comme nous l'avons déjà dit, n'est pas « plus difficile que beaucoup d'autres; elle est même, selon « nous, assez facile, pourvu toutefois qu'on ne s'écarte pas des « vrais principes ». (Nyl. *Prodr.* p. 15.) Écoutez encore Élias Fries, cet autre prince de la lichénologie. Il déplore l'abandon que l'on fait de cette étude et le met, comme Nylander, sur le compte d'une fâcheuse prévention.

« On s'imagine, dit-il, que la famille des lichens est tellement « vaste et compliquée que l'étude en doit être réservée aux spé- « cialistes; c'est une erreur. Un seul genre de champignons, les « agarics, m'ont coûté trois fois plus de travail que toute la fa- « mille des lichens. »

Quant au microscope, on a tort de croire qu'il fasse plus mal aux yeux qu'une simple loupe. Sans doute, il y a certaines précautions à prendre; mais, ces précautions prises, il n'y a guère de différence entre regarder à l'œil nu et regarder au microscope.

Les préparations non plus ne doivent pas effrayer. Sauf de rares exceptions, une préparation ne demande pas plus de cinq minutes. Les longueurs et les difficultés proviennent bien plutôt des descriptions trop vagues des auteurs et du manque d'exsiccata; et encore l'indication des réactions et les clefs analytiques viennent-elles de plus en plus faire disparaître, du moins en partie, cet inconvénient.

Les commencements, ici comme partout, peuvent être pénibles, je l'avoue; mais un peu de persévérance aurait vite surmonté les principaux obstacles.

Mes notes s'arrêteront aux *Lecidea* et seront continuées plus tard.

### Collema Ach.

*C. chalazanum* Ach.
Liverdun, Gerbéviller, Pompey; pierres terreuses et mousses.

*C. chalazanellum* Nyl. Add. 56.
Pompey, Fonds-de-Toul, Malzéville, Houdemont; mousses.

*C. myriococcum* Ach. Nyl. *Lich. d'Algérie,* 319.
Gerbéviller, Liverdun, Brabois ; murs terreux et mousses [1].

Les trois espèces ci-dessus appartiennent au même type et se distinguent des autres *collema* de Lorraine par leurs spores simples et par la réaction : gél. hym. 1 + bleu puis rouge vineux.

*C. hypergenum* Nyl., Add. 64.
Clairlieu, Gerbéviller, Fonds-de-Toul, Brabois, et généralement sur les pierres calcaires des murs, aux environs de Nancy.

Très rapproché du *C. melœnum* avec lequel il a été confondu et dont il se distingue par la grandeur de ses spores dépassant souvent $0^{mm},030$ en longueur.

**Leptogium** Fr.

*L. subtile* Nyl.
Baraques-de-Toul, Montaigu ; sur terre.

Le *L. scotinum* des St. de Mougeot, n° 1332, est le *L. sinuatum* Nyl.

Le *L.* intitulé *L. bolacinum* Sch. par Godron, est le *L. lophœum* Ach.

**Calicium** Ach.

*C. trichiale* Ach. M. [2].
Méréville, Moulin-Bois ; Abb. Hue.
Fonds-de-Toul ; chêne.
V. *physarellum* Ach. M.
Tilleul de l'hermitage de Saint-Livier, près de Moyenvic, Lorraine annexée.
*C. curtum* Borr. V. *pusillum* Sch. M.
Renémont ; peupliers, Fonds-de-Toul ; vieux chêne.
*C. roscidum* Flk. M.
Richardménil, bois de la Petite-Croix ; chêne ; Abb. Hue.
*C. cinereum* Pers.
Richardménil, bois, chêne ; Abb. Hue.

C'est un des trois calicium signalés dans les Add., 136, comme rentrant dans le groupe *allodium,* à cause de leur thalle pulvérulent et formé principalement de gonidies oblongues, lesquelles ne se rencontrent dans aucun autre genre de lichens.

Les deux autres espèces du groupe sont : *C. trichiale* Ach. et *C. stemoneum* Ach.

1. J'ai recueilli cette même espèce au Rigi, Suisse.
2. La lettre M, placée à la suite d'un nom d'espèce, signifie que cette espèce n'a pas été signalée dans la Meurthe.

**Coniocybe** Ach.

*C. pallida* Fr. V. *xanthocephala* Sch.
Sandronviller, avenue du château; tilleul.

**Bæomyces** Pers.

*B. rufus* Whlnb. R. [1].
Benney; alluvion siliceuse, localité intéressante pour la M. ; Abb. Mougenot.
*B. Roseus* Pers. R.

J'indique une magnifique station où cette espèce est si abondante et si bien fructifiée que la terre en paraît toute rose : entre Gerbéviller et Xermaménil, dans les terres argileuses qui bordent le bois.

**Stereocaulon** Schreb.

*St. tomentosum* Laur. V. *alpinum* Laur. R.

Voici, pour cette espèce rare, deux localités en dehors, il est vrai, de la Lorraine, mais appartenant à la région vosgienne :

1° Wesserling, hauteurs qui dominent le village, sur des pierriers, au bord du bois ; 2° à l'entrée du Champ-du-Feu, en venant du Hohwald, sur terre.

A propos des stereocaulon, Nylander, qui a vu passer sous ses yeux tant de lichens des différentes parties du globe, déclare que nulle part le *St. coralloides* n'est aussi beau que dans les Vosges.

**Cladonia** (Hffm.) Nyl.

*Cl. pyxidata* Fr. V. *epiphylla* Ach.
Fléville ; terre argileuse.

Variété très rare et très curieuse dont les apothécies reposent immédiatement sur les folioles.

*Cl. leptophylla* Flk.
Fléville, Gerbéviller ; terre argileuse.

Le *Cl. gracilis* Hffm. des St. de Mougeot, n° 849, n'est pas la v. *hybrida* Hffm., mais la v. *aspera* Ach. Mallebranche a déjà fait cette rectification dans son *Suppl.*, p. 11.

*Cl. crispata* Ach. V. *trachyna* Ach.
Rotabac et Saint-Mont, près de Remiremont ; Abb. Hue.
*Cl. fimbriata* Fr. V. *radiata* Schreb.

1. Cette lettre R. annonce simplement une remarque sur une espèce déjà signalée.

Cette variété, dont plusieurs auteurs ont fait une espèce, est très polymorphe. Les formes et la variété suivantes n'ont pas été indiquées en Lorraine :

*F. fibula* Sch.
Fléville ; terre argileuse.
*F. subcornuta* Nyl.
Richardménil, sur terre; Abb. Hue; Hohneck, Schlucht, St-Dié, Brichambaut.
V. *Coniocræa* Nyl.
Heillecourt, bois, chêne moussu.
*Cl. Brebissonii* Del.
Baccarat, sur terre ; Abb. Mougenot.

**Cladina** Nyl.

*Cl. sylvatica* Nyl. V. *pumila* Ach. M.
Pont-Saint-Vincent, bois, vieilles carrières ; Abb. Hue.

**Ramalina** Ach.

*R. farinacea* Ach. R.

Cette espèce, presque toujours stérile, a été trouvée en fruits :

Route d'Azelot, jeunes frênes ; Abb. Hue.
Gerbéviller, jeunes frênes.

**Cetraria** Ach.

*C. islandica* Ach. R.
Trouvé fertile : Rotabac ; Abb. Hue ; Hohneck.

Le *C. crispa* que l'on rencontre sur les sommets des environs de Nancy est, d'après M. Hue, la v. *subnigricans* Nyl.

**Evernia** Ach.

*E. prunastri* Ach. R.

Dans le nouveau catalogue des Vosges, il est dit que cette espèce ne fructifie que sur les arbres des hautes Vosges. Les indications suivantes ne concordent pas avec cette assertion :

Trouvé fertile : à Azelot, route, jeunes frênes ; Abb. Hue ; à Gerbéviller, jeunes frênes, bois ; à Badonviller, hêtres, bois.

**Parmelia.**

*P. caperata* Ach. R.
Fertile : à Houdemont, noyer ; à Gerbéviller, bois, bouleau.
*P. scortea* Ach. R.
Fertile : à Messein, noyer ; à Saulxures-les-Vannes, vieilles palissades en chêne.

*P. exasperata* Nyl.
*P. fuliginosa* Nyl.
v. *lætevirens* Nyl.
*P. subaurifera* Nyl.

Ces trois espèces, ainsi que la v. *lætevirens,* n'avaient pas été distinguées dans la Meurthe. Godron les a confondues, comme on le faisait, du reste, généralement de son temps, sous le nom *P. olivacea* qui n'existe pas en Lorraine.

**Lobaria** (Hffm.) Nyl. (*Sticta* Ach.)

*L. pulmonacea* Nyl. R.

Assez commun dans les endroits humides des grandes forêts de la Meurthe, mais rarement fertile. Voici deux belles stations : 1° Saulxures-les-Vannes, fonds de la Croix-Saint-Remy ; 2° forêt de Saint-Amon.

**Stictina** Nyl. (*Sticta* Ach.)

Le *St. sylvatica* Nyl. se distingue très difficilement, du moins sous certaines formes, du *St. fuliginosa* Nyl. Voici quelques signes, malheureusement peu constants, qui pourront aider à reconnaître ces deux espèces. Le *St. fuliginosa* est, à la face supérieure, d'un brun plus foncé. En dessous, il est plus velu, jusque vers les bords. Les cyphelles sont moins visibles. Le thalle est moins profondément découpé et à lobes plus larges. Quant aux granulations de la face supérieure, elles sont souvent aussi abondantes dans le *St. sylvatica* que dans le *St. fuliginosa*.

Ces deux (?) lichens se rencontrent sur les rochers moussus humides et sur les arbres. Le *St. sylvatica* m'a paru préférer les arbres et être rare en Lorraine.

**Lobarina** Nyl. (*Sticta* Ach.)

*L. scrobiculata* Nyl. R.
Fertile au Ballon d'Alsace et à Vagney.

Souvent sorédié et rarement fertile. Je n'ai pas pu le rencontrer une seule fois fructifié, à la Schlucht, lieu dit *Sources de la Meurthe,* où il est abondant.

**Peltidea** Nyl. (*Peltigera* Hffm.)

*P. aphthosa* (L.) Ach. Nyl. R.

Un exemplaire de cette espèce, provenant de Pont-à-Mousson et déterminé par Godron, se trouve dans l'herbier de la Malgrange. Je note cette localité comme extraordinaire.

**Solorina** Ach.

*S. saccata* Ach. R. Recueilli en 1888 par Eug. Rohmer à Liverdun, où il avait été indiqué par Godron.

Trouvé aussi à Pont-Saint-Vincent, bois, vieilles carrières ; Abb. Hue.

**Peltigera** Hffm.

*P. spuria* Dc. M.

Gerbéviller, Montaigu, alluvion siliceuse.

Fléville, terre argileuse. Paraît commun dans la Meurthe.

**Physcia** Schreb.

*Ph. parietina* Nyl., v. *aureola* Nyl. M.

La Malgrange, la Chartreuse ; murs, pierres, tuiles, lattes.

*Ph. ulophylla* Wallr.

Route de Laneuveville-lès-Nancy, peuplier d'Italie. Paraît très rare.

*Ph. polycarpa* Nyl. M.

La Malgrange, espaliers ; Malzéville, *Prunus spinosa*.

*Ph. lychnea* Nyl. M.

La Malgrange, écorces et bois ; jamais fertile.

V. *pygmœa* Sch. M.

La Malgrange, Chartreuse, murs. Jamais fertile.

*Ph. aipolia* Nyl.

Messein, Gerbéviller, Saulxures-les-Vannes, écorces et bois.

Se distingue du *Ph. stellaris*, avec lequel il a été souvent confondu, par la réaction Th. K $\pm$ jaune ; tandis que le *Ph. stellaris* a Th. K $\pm^{\text{jaune}}$.

**Gyrophora** Ach. (*Umbilicaria* Hffm.)

Mougeot a donné, sous le nom de *U. erosa* Hffm., un lichen qui, d'après M. Hue, est le *G. flocculosa* Krb.

**Pannaria** Del.

*P. microphylla* Mass.

Remiremont, au Saint-Mont, rochers ; Abb. Hue.

Vagney, rochers humides.

**Pannularia** Nyl. (*Pannaria* Del.)

*P. nigra* Nyl., v. *triseptata* Malbr.

Çà et là ; écorces et pierres calcaires.

**Lecanora** Ach.

*Placodium* Dc.

*L. murorum* Ach., v. *pulvinata*, f. *cinnabarina* Nyl. M.

Il est bien à craindre qu'on n'ait pris souvent cette forme pour le *L. elegans,* auquel elle ressemble.

*L. variabilis* Ach.

Se distingue facilement du *L.* (*Squamaria, Placodium*) *subcircinata* par l'examen des spores qui sont placodiomorphes.

Pierres calcaires; Chartreuse, Vandœuvre, Houdemont, Pont-Saint-Vincent, Malzéville.

*L. medians* Nyl.

Paraît être commun en Lorraine. Sa ressemblance avec le *L. callopisma* avait, sans doute, empêché de le reconnaître. Il est toujours étroitement appliqué sur la pierre de taille ou sur le ciment. Ses lobes sont vitellins, tandis que le centre est gris bleuâtre. Le thalle n'a pas de réaction par K, non plus que l'épithécium.

Plusieurs préparations m'ont fait voir des spores mûres placodiomorphes, ce qui serait en contradiction avec Add., p. 76. Je n'ai pas trouvé de spermogonies. Son thalle et ses spores le rapprochent des *Placodium,* mais ses stérigmates longs et simples le rapprochent du groupe *Candelaria* Nyl. où Nylander le place, à côté de *L. laciniosa*. Ordinairement stérile, il est en fruits : à la Malgrange, sur une borne; à la Chartreuse, sur les colonnes de l'église, où il est mêlé au *L. Heppiana*. Il tapisse volontiers les parapets des ponts : pont sur la Moselle, à Dommartin-lès-Toul; pont à l'entrée de Laneuveville-lès-Nancy; pont à l'entrée de Jarville. Ce lichen se trouve aussi sur le mur du Jardin botanique de Nancy, en dehors, vis-à-vis de la caserne.

*Squamaria.*

*L. subcircinata* Nyl. Add. 580.
Pierres calcaires; commun en Lorraine.

On a pris généralement ce lichen, qui a Th. K + jaune puis rouge-sang pour le *L. circinata* qui a Th. K — et qui ne se rencontre guère dans notre région.

*Rinodina* Krb.

*L. exigua* Ach. Add. 543.
Richardménil, tuiles; Abb. Hue. La Malgrange, tuiles.

Diffère du *L. sophodes* Ach. uniquement par ses spores plus petites : 11, 12 × 6.

*L. roboris* Duf. Add. 549.
Sandronviller, tilleul ; La Malgrange, lattes en sapin.

Diffère par son Th. K + jaune du *L. sophodes*, dont Th. K =.

*Lecanora* Ach. pr. p.

*L. subalbella* Nyl. Add. 610.
Gerbéviller, palissades ; Vaucourt, palissades ; Sandronviller, chêne.

Diffère du *L. albella* par la persistance de la réaction bleue par I de la gél. hym.

*L. conizæa* Ach. M.
Gerbéviller et Valcourt, palissades.
*L. symmicta* Ach., v. *trabalis* Ach.
La Malgrange, lattes en sapin.
*L. intricata* Schrad.
Roches granitiques. Cette espèce est commune au Champ-du-Feu.
*L. sarcopis* Ach.
La Malgrange, lattes en sapin.
*L. subtartarea* Nyl. Add. 724.
Schlucht, sur des coussins de mousse.
Messein, Malzéville, Moncourt, Lorraine annexée ; chênes.

Paraît commun dans les forêts de la plaine ; il se distingue facilement des *Pertusaria globulifera* et *multipuncta* auxquels il ressemble par la réaction Th. Ca Cl. + rouge.

*L. parella* Ach., *corticola*. R.

Se rencontre dans la Meurthe un peu partout ; assez commun à Saulxures-les-Vannes sur les cerisiers et, route de Vézelise, près de Nancy, frênes et ormes.

*L. gibbosa* Nyl. M.
La Malgrange, tuiles.
*L. calcarea* Somm., v. *Hoffmanni* Ach. M.
Pont-Saint-Vincent, La Malgrange, Saulxures-les-Vannes, pierres calcaires.
Paraît assez commun dans la Meurthe.
*L. farinosa* Flk. Nyl. Add. 763.
Fonds de Toul, plateau de Malzéville ; roches calcaires.
*L. mutabilis* Nyl.
Route de Vézelise, derrière la Malgrange, frêne, un seul arbre.

Cette espèce n'a pas encore été signalée, non seulement en Lorraine, mais encore dans la région de l'Est.

Nylander, dans son *Prodrome*, p. 84, donne ce *Lecanora* comme un lichen du Midi, où il serait rare : « *in Gallia mitiore rarius.* »

*Lecania* Krb.

*L. erysibe* Ach.
La Malgrange, mur du parc.
*L. athroocarpa* Dub.
La Malgrange, Montaigu, la Chartreuse, peupliers.
Saulxures-les-Vannes, chêne.

*Acarospora* Krb.

*L. Heppii* Næg. Nyl. Add. 787.
Fléville, rognons de l'argile du lias.

**Pertusaria** DC.

*P. multipuncta* Nyl.
*P. globulifera* Nyl.
*P. amara* Nyl.

Ces trois espèces ont été plus ou moins confondues sous différents noms. La troisième se distingue des deux premières par la réaction : sorédies K (Ca Cl) + violet. La deuxième se distingue de la première, dont elle n'est peut-être qu'une variété, par son thalle grisâtre ordinairement figuré au bord et par ses verrues plus grandes. Cf. Add. 810, 812 et 813.

*P. lactea* Nyl. Add. 815.
Roches granitiques, Ballon d'Alsace; Abb. Hue. Gérardmer, Vagney.
*P. leioplaca* Schær., v. *juglandis* Garov.
Noyers ; Saulxures-les-Vannes, Houdemont.
*P. melaleuca* Dub.

Je n'ai trouvé ce lichen qu'une seule fois et un seul exemplaire.

Moncourt, Lorraine annexée, chêne.

*P. Wulfenii* DC. R.

Donné comme très rare par Godron. Voici quelques localités :

Saulxures-les-Vannes, bois de réserve où il est très abondant ; La Malgrange, bois du parc, chênes ; Houdemont, noyers.

**Phlytis** Wallr.

*Ph. agelæa* Wallr. M.

N'est pas signalé par Godron, bien qu'il soit des plus communs sur toutes sortes d'écorces.

**Thelotrema** Ach.

*Th. lepadinum* Ach. M.

Moncourt et Heillecourt, vieux saules, sur le bois. Environs de Nancy, écorce de cerisier.

**Urceolaria** Ach.

J'ai trouvé en abondance, sur les murs du potager de la Chartreuse de Bosserville, un *Urceolaria* qui doit être *U. scruposa*, v. *cretacea* Schaer.

# LISTE

# DES DESMIDIÉES

## OBSERVÉES DANS QUELQUES LACS DES VOSGES

## ET AUX ENVIRONS D'ÉTIVAL[1]

**Par le Dr Ad. LEMAIRE**

PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY

Le travail que j'ai publié en 1883 sur les Desmidiées des Vosges [2], comprenait principalement la liste des espèces observées aux environs de Senones et au Champ-du-Feu.

J'ai eu l'occasion, depuis cette époque, de rechercher ces plantes dans d'autres points des Vosges.

C'est surtout dans la région des Hautes-Vosges granitiques, les lacs de Longemer et de Lispach ainsi que les tourbières du Tanet, qui m'ont procuré d'abondantes récoltes de Desmidiées.

Les environs d'Étival, faisant partie des Vosges moins élevées et composées de grès vosgien, m'ont donné aussi de très bons résultats.

Ces recherches augmentent de 42 espèces la liste des Desmidiées observées dans les Vosges. Cette liste comprend actuellement 222 espèces, dont 2 sont nouvelles.

La comparaison de la flore vosgienne avec la flore des Desmi-

1. Communication faite dans la séance du 16 mars 1889.

2. *Liste des Desmidiées observées dans les Vosges jusqu'en* 1882. (*Bull. de la Société des sciences de Nancy,* 1883.)

diées des autres pays d'Europe, met en évidence la grande analogie de cette flore avec celle des pays scandinaves.

### *Lac de Longemer.*

Le lac de Longemer, qui s'étend du nord-ouest-sud-est sur une longueur de 2 kilomètres, entre des montagnes élevées à plus de 1,000 mètres, a une altitude d'environ 740 mètres.

On fera de fructueuses récoltes sur le côté sud-ouest opposé à la route que prennent d'habitude les touristes qui se dirigent de Gérardmer à Retournemer. La partie de ce bord située près de l'extrémité du lac, tournée vers le hameau de Longemer, est tourbeuse. Les espèces particulières qu'on y rencontre sont :

*Micrasterias fimbriata* Ralfs.
— *americana* Ehrenb.
*Penium rufescens* Clève.
***Cosmarium quinarium*** Lund.
*Pleurotænium clavatum* Kütz.
***Staurastrum sexangulare*** Bulnh.

La liste des espèces observées est la suivante :

*Micrasterias denticulata* Bréb.
— *rotata* Grév.
* [1] — *fimbriata* Ralfs. (***Brit. Desm.***, p. 71. Tab. VIII, fig. 2.)
* — *americana* (Ehren.).
— *morsa* Ralfs (***Brit. Desm.***)
— *truncata* Corda.
*Euastrum pectinatum* Bréb.
— *oblongum* Grév.
— *crassum* Bréb.
— *didelta* Ralfs.
— *ansatum* Ehrenb.
— *sinuosum* Lenorm.
— *binale* (Turp.), var. α et β (Ralfs).
**Cosmarium quinarium* Lund. (***Desm. Succ.***, p. 28. Pl. II, fig. 14.)
— *ornatum* Ralfs.
— *perforatum* Lund.
— *bioculatum* Bréb.
— *globosum* Bulnh.
— *connatum* Bréb.
— *portianum* Archer.
* — *subquadratum* Nordst. (***Desmid. Italis.***, p. 32. Tab. XII, fig. 7.)

1. Les espèces marquées d'un astérisque n'ont pas encore été observées dans les Vosges.

*Staurastrum brevispina* Bréb.
— *dilatatum* Ehrenb.
— *hystrix* Ralfs.
— *tetracerum* Ralfs.
* — *sexangulare* Bulnh. (In *Hedwigia*, p. 51. Tab. IX, A, fig. 1)
*Schizacanthum armatum* Bréb.
*Holacanthum fasciculatum* Bréb.
*Tetmemorus granulatus* Ralfs.
*Closterium didymotocum* Ralfs.
— *striolatum* Ehrenb.
— *intermedium* Ralfs.
— *Archerianum* Lund.
— *costatum* Corda
— *lunula* (Müller).
— *lineatum* Ehrenb.
— *Dianæ* Ehrenb.
*Penium closterioides* Ralfs.
— *margaritaceum* Ehrenb.
— *cylindrus* Ehrenb.
* — *rufescens* Clève. (*Bidrag.*, p. 493. Tab. IV, fig. 5.)
**Pleurotænium clavatum* Kütz *in* Ralfs. (*Brit. Desm.*, p. 156. Tab. XXVI, fig. 3.)
*Spirotænia condensata* Bréb.
*Didymoprium Grevillei* Kütz.

## *Lac de Lispach.*

Le lac de Lispach, situé au sud-ouest du précédent, est au-dessus de la colline du Chajoux, qui aboutit au village de la Bresse. Il a une altitude de 900 mètres. Ce lac, très petit, se transforme en tourbe : il est entouré d'une vaste tourbière bordée de forêts.

Dans les fosses de la tourbière, on peut récolter :

*Micrasterias Jenneri* Ralfs.
*Euastrum crassum* Bréb.
— *cuneatum* Jenner.
— *ampullaceum* Ralfs.
*Cosmarium Nymannianum* Grün.
— *cruciatum* Bréb.
— *ornatum* Ralfs.
*Staurastrum inconspicuum* Nordst.
* — *subscabrum* Nordst.
* — *diacanthum* Lem.
* — *arachne* Ralfs.
* — *controversum* Bréb.
**Penium spirostriolatum* Bark.

Sur les bords sphagneux du lac végètent :

**Micrasterias pinnatifida.*
**Staurastrum setigerum* Clève.
**Penium minutum,* var. *major* Bulnh.
*Docidium dilatatum* Clève.

Les différents types récoltés sont :

*Micrasterias Jenneri* Ralfs.
— *papillifera* Bréb.
* — *pinnatifida* Kütz, Ralfs. (*Brit. Desm.*, p. 77. Tab. X, fig. 3.)
— *truncata* Corda.
*Euastrum crassum* Bréb.
— *ampullaceum* Ralfs.
— *cuneatum* Jenner.
— *sinuosum* Lenorm. (*E. circulare* B. Ralfs.)
— *insigne* Hass.
* — *intermedium* Clève. (*Bidrag.*, p. 484. Tab. IV, fig. 1.)
— *rostratum* Ralfs.
— *venustum* Bréb.
**Cosmarium Hammeri* Reinsch. (*Algenflora*, p. 111. Tab. X, fig. 1.)
— *Nymannianum* Grunow.
* — *trilobulatum* Reinsch. (*Algenflora*, p. 116. Tab. IX, fig. 6.)
* — *protuberans* Lund. (*Desmid. Succ.*, p. 37. Tab. III, fig. 17.)
* — *pseudoprotuberans* Kirchner. (*Algenfl.*, v. *Schles.*, p. 150.)
— *tumidum* Lund.
— *pyramidatum* Bréb.
* — *pseudopyramidatum* Lund. (*Desmid. Succ.*, p. 41. Tab. II, fig. 18.)
* — *cruciatum* Bréb. (*Desmid. Normand.* Tab. I, fig. 14.)
— *ornatum* Ralfs.
*Arthrodesmus incus* Bréb.
— *octocornis* Ehrenb.
*Staurastrum inconspicuum* Nordst. (*Norg. Desmid.*) V. *vogesianum.*
— (*St. subrefractum.* Lem., *Liste.*)
— *dejectum* Bréb.
— *brachiatum* Ralfs.
* — *læve* Ralfs. (*Brit. Desm.*, p. 131. Tab. XXIII, fig. 10.)
— *margaritaceum.*
* — *setigerum* Cleve. (*Bidrag.*, p. 490. Tab. IV, fig. 4.)
— *hystrix* Ralfs.
— *scabrum* Bréb.
* — *subscabrum* Nordst. (*Alg. Sandvic.*, p. 16. Tab. II, fig. 1.)
— *furcatum* Bréb.
— *polymorphum* Bréb.
* — *controversum* Bréb. *in* Ralfs. (*Brit. Desm.*, p. 141. Tab. XXIII, fig. 3.)
* — *diacanthum,* sp. n. (Pl., fig. 2, *a, b, c.*)

Cellules moyennes, environ deux fois plus larges que longues ; étranglement large. Demi-cellules vues de face, presque triangulaires, à dos arrondi, surface lisse, pourvues à chaque angle d'un long prolongement horizontal, à bords ondulés (2 à 4 ondulations), muni supérieurement d'un aiguillon, et à sommet tricuspidé. Demi-cellules vues du sommet, à bord concaves, pourvues de 3 à 4 rayons tricuspidés au sommet, ondulés sur les bords et présentant de chaque côté de leur base un aiguillon. Membrane lisse.

J'ai nommé cette espèce *St. diacanthum,* par allusion aux prolongements des cellules pourvus chacun de deux épines (δύω, *deux ;* ἄκανθος, *épine*).

Long. demi-cellule : 14 μ. — Largeur avec bras : 32 à 50 μ. — Largeur sans bras : 20 μ. — Larg. isthme 8 μ.

Cette plante diffère du *St. gracile* par la membrane lisse de ses cellules, et par la présence d'une paire d'épines sur les rayons dont les bords sont ondulés.

*Staurastrum tetracerum* Ralfs.
* — *arachne* Ralfs. (*Ann. of nat. Hist.,* vol. XV, p. 157. Tab. XI, fig. 6.)
*Schizacanthum armatum* Bréb.
*Tetmemorus granulatus* Ralfs.
— *Brebissonii* Ralfs.
— — v. *minor.* De Bary.
*Closterium striolatum* Ehrenb.
— *intermedium* Ralfs.
— *Dianæ* Ehrenb.
*Cylindrocystis Brebissonii* Menegh.
*Penium digitus* Ehrenb.
* — *spirostriolatum.* (Barker, *Dub. mic. Club.,* 1868. — Pl., fig. 1, *a, b.*)

L'espèce vosgienne me semble être celle décrite sommairement et sans figure par Barker.

Elle est cylindrique, atténuée vers les sommets qui sont capités et tronqués. Elle possède des stries dirigées en spirale, interrompues par des lignes transversales.

Elle me paraît aussi être identique à l'espèce décrite par *Jacobsen* (*Aper. syst. sur les Desmidiées du Danemark,* p. 177. Pl. VII, fig. 8), sous la dénomination de *Closterium spiraliferum.*

Long. 165-220 μ. — Larg. 22-25 μ.

*Penium cylindrus* Ehrenb.
— *polymorphum* Perty.
— *minutum* Ralfs, var. *major*. (Bulhn. In *Hedwigia*.)
*Docidium dilatatum* Clève.
*Spirotœnia condensata* Bréb.
*Desmidium Borreri* Ralfs.
— *Swartzii* Ag.

### *Tourbières du Tanet.*

En suivant les crêtes des Chaumes, qui mènent de la Schlucht au lac Blanc, on rencontre sur son trajet, à environ 4 kilomètres de la Schlucht, la tourbière très étendue et bien éclairée du Tanet (alt. 1,266 mètres).

On y trouve les espèces peu communes suivantes :

*Cosmarium obliquum* Nordst.
*Staurastrum O'Mearii.*
— *diacanthum*, sp. n.
— *paucidentatum*, sp. n.
*Penium spirostriolatum* Barker.
— *minutissimum* Nordst.
*Staurastrum geminatum* Nordst.

Les différentes espèces récoltées sont :

*Micrasterias truncata* (Corda).
*Euastrum crassum* Bréb.
— *cuneatum* Jenner.
— *elegans* Bréb.
— *binale* Ralfs., var. *b*.
*Cosmarium pseudopyramidatum* Lund.
— *pygmœum* Archer.
— *tumidum* Lund.
* — *obliquum* Nordst. (*Desm. sydl. Norg.*, p. 23. Tab. I, fig. 8.)
* — *moniliforme* Turp. *in* Ralfs. (*Brit. Desm.*, p. 107. Tab. XVII, fig. 6.)
*Arthrodesmus incus* (Bréb.).
— *tenuissimus* Archer.
— *octocornis* Ehrenb.
*Staurastrum inconspicuum* Nordst. Variété *vogesianum*. (*St. subrefractum* Lem.)
* — *O'Mearii* Archer. (In *Proceed. of Dub. Zoot. Bot. Assoc.*, vol. I, 1858. Tab. XI, fig. 10-13.)
— *brachiatum* Ralfs.
— *margaritaceum*.
* — *geminatum* Nordst. (*Desm. sydil. Norg.*, p. 30, fig. 13.)

*Staurastrum furcatum* Bréb.

* — *paucidentatum*, sp. nov. (Pl., fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.)

Cellules petites, un peu plus larges que longues, à étranglement étroit. Demi-cellules, vues de face, triangulaires à dos tronqué ou légèrement concave, à angles supérieurs insensiblement prolongés en une courte branche triangulaire divergente, bi-quadridentée sur ses bords, tronquée-spinuleuse au sommet. Demi-cellules, vues de sommet, à 3-4 rayons, à côtés concaves. Les rayons bi-quadridentés ont leur extrémité tronquée-spinuleuse.

Long. demi-cellule avec rayons : 18-20 μ.

Long. sans rayons : 7 μ. — Largeur grande : 18-22 μ.

Larg. d'isthme : 5 à 6 μ.

Cette espèce, à laquelle j'ai donné la désignation de *Staurastrum paucidentatum* en raison du petit nombre de dents qui garnissent les bords des rayons, est voisine du *St. tetracerum*. Elle en diffère par ses 3 à 4 rayons plus courts à bords dentés.

*Staurastrum saxonicum* Bulnh.

— *diacanthum*, sp. nov.

*Holacanthum antilopæum* Bréb.

*Closterium didymotocum* Ralfs.

*Penium margaritaceum* Ehrenb.

— *spirostriolatum* Barker.

— *minutum* Ralfs.

* — *minutissimum* Nordst. (*Desmid. sydlig. Norg.*, p. 46, fig. 21.)

*Desmidium Borreri* Ralfs.

## *Mares d'Étival.*

Le village d'Étival est situé dans la vallée de la Meurthe, entre Saint-Dié et Raon-l'Étape. Il est à une altitude de 310 mètres. Près de cette localité sont de petites mares où végètent des *Utriculaires*. Sur ces plantes vivent de nombreuses Desmidiées telles que :

*Euastrum elegans* Bréb.

— *binale*, var. *a*, *b*. (Ralfs.)

*Cosmarium punctulatum* Bréb.

— *Regnesi* Reinsch.

* — *Blytii* Wille. (Bidr., *Kundskalen om Norges.*, p. 25. Tab I, fig. 7.)

— *ochtodes* Nordst.

*Cosmarium crenatum* Ralfs.
* — *Bœckii* Wille. (Bidrag, *Kansk. om Norges.*, p. 28. Tab. I, fig. 10.)
* — *Kjelmani* Wille. (Terskv., *Alg. f. Nov. Seml.*, p. 43. Tab. XII, fig. 33.)
— *Meneghini* Bréb.
*Arthrodesmus convergens* Ehrenb.
*Staurastrum punctulatum* Bréb.
— *cristatum* Archer.
— *Mandfeldtii* Delponte.
— *gracile* Ralfs.
*Holacanthum fasciculatum* Bréb.
*Pleurotœnium nodulosum* Bréb.
— *Archeri* Delp.
**Sphœrozosma vertebratum* Bréb. (*Alg. Falais.*, p. 65. Tab. II.)
— *excavatum* Ralfs.
*Desmidium Swartzii* Ag.
**Aptogonum desmidium* Bréb. (*Alg. Fal.*, p. 65. Tab. II.)
* — *tetragonum* Delp. (*Desmid. subalp.*, p. 63. Tab. III, fig. 20-25.)
*Hyalotheca dissiliens* (Smith).

### *Étangs tourbeux et tourbières de la Belotte (près Étival).*

A l'ouest d'Étival s'étend un petit vallon resserré entre des montagnes de grès vosgien. Dans ce vallon est tracé le chemin reliant Étival à la route nationale qui conduit de Raon-l'Étape à Rambervillers. Le vallon est marécageux près de la ferme connue sous le nom de Belotte (altitude : 370 mètres). La nature du sol est due à la présence de trois petits étangs placés à une petite distance l'un de l'autre. Ces étangs sont séparés entre eux par des terrains tourbeux. Le botaniste peut récolter, au bord de ces étangs et dans les terrains fangeux environnants, de nombreux échantillons de *Drosera rotundifolia* et *D. intermedia*, ainsi que le *Lycopodium inundatum*.

On trouve dans cette région de nombreuses Desmidiées, comme on peut en juger par la liste suivante :

*Micrasterias denticulata* Bréb.
* — *Thomasiana* Arch. (*Descript.*, p. 239. Tab. XII, fig. 1-5.)
— *rotata* Grév.
— *papillifera* Bréb.
* — *Crux Melitensis* Ehrenb. (Ralfs., *Britis. Desmid.*, p. 73. Tab. IX, fig. 3.)
— *truncata* (Corda).
*Euastrum verrucosum* (Ehrenb.).

*Euastrum pectinatum* Bréb.
* — *gemmatum* Bréb. (Ralfs., *Brit. Desm.*, p. 87. Tab. XIV, fig. 4.)
— *oblongum* (Grév.)
— *crassum* Bréb.
— *sinuosum* Lenorm.
— *insigne* (Hass.).
— *elegans* (Bréb.).
— *binale*, var. *a*, *b*, *c* Ralfs.
*Cosmarium quadrum* Lund.
— *tetraophtalmum* Kütz.
— *Brebissoni* Menegh.
— *ornatum* Ralfs.
* — *anisochondrum* Nordst.
* — *Bromei* Thwiates. (*In* Ralfs., *Brit. Desmid.*, p. 103. Tab. XVI, fig. 6.)
— *punctulatum* Bréb.
— *Blytii*.
— *Regnesi* Reinsch.
— *cælatum* Ralfs.
* — *retusum* Perty. (Kleinst., *Lebensf.*, p. 208. Tab. XVI, fig. 12.)
— *perforatum* Lund.
— *pyramidatum* Bréb.
— *Meneghini* Bréb.
— *angulosum* Bréb.
— *concinnum* Reinsch.
— *connatum* Bréb.
— *portianum* Arch.
— *amœnum* Bréb.
— *annulatum* Näg.
— *tinctum* Ralfs.
— *palangula* Bréb.
*Pleurotæniopsis cucumis* (Corda).
*Arthrodesmus convergens* Ehrenb.
— *tenuissimus* Archer.
— *incus* (Bréb.).
— *octocornis* Ehrenb.
*Staurastrum orbiculatum* Ehr.
* — *striolatum* Näg. (*Gatt. einzell. Alg.*, p. 126. Tab. VIII, A, fig. 3.)
— *mucronatum* Ralfs.
— *dejectum* Bréb.
— *punctulatum* Bréb.
— *avicula* Bréb.
— *teliferum* Ralfs.
— *spongiosum* Bréb.
— *polymorphum* Bréb.
— *vestitum* Ralfs.
— *gracile* Ralfs.
— *tetracerum* Ralfs.

*Schizacanthum armatum* Bréb.
*Holacanthum cristatum* Bréb.
— *antilopæum* Bréb.
*Tetmemorus Brebissonii* Ralfs.
— *granulatus* Ralfs.
*Closterium didymotocum* Ralfs.
— *striolatum* Ehrenb.
— *intermedium* Ralfs.
— *costatum* (Corda).
*Closterium angustatum* Kütz.
— *juncidium* Ralfs.
— *lunula* Muller.
— *acerosum* Ehrenb.
— *attenuatum* Ehrenb.
— *Diancæ* Ehrenb.
* — *prælongum* Bréb. (*Desmid. Normand.*, p. 152. Tab. II, fig. 11.)
— *gracile* Bréb.
*Penium digitus* Ehrenb.
— *lamellosum* Bréb.
— *interruptum* Bréb.
— *closterioides* Ralfs.
— *navicula* Bréb.
— *cylindrus* Ehrenb.
*Pleurotænium nodulosum* Bréb.
— *trabecula* Ehrenb.
*Spirotænia condensata* Bréb.
*Sphærozosma excavatum* Ralfs.
*Hyalotheca dissiliens* (Smith).
*Desmidium Swartzii* Ag.

## EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1. — *Penium spirostriolatum* Bark. — *a, b,* 2 formes.

Fig. 2. — *Staurastrum diacanthum,* sp. nov. — *a,* vue de face; *b. c,* vue de sommet.

Fig. 3. — *Staurastrum paucidentatum,* sp. nov. — *a, b,* vue de face : *b. c,* vue de sommet.

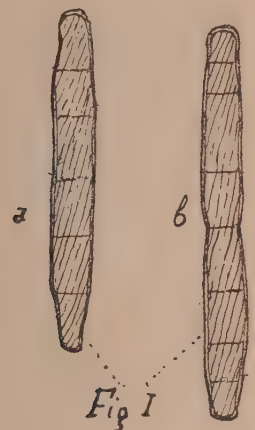



Fig 1

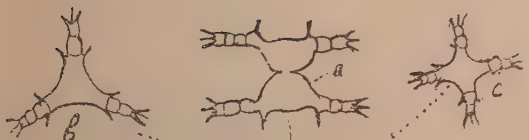



Fig. 2

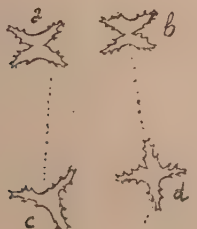



Fig. 3

# OBSERVATION

# D'UN CAS TÉRATOLOGIQUE RARE

## MALFORMATION

### DES PAROIS DE LA CAVITÉ BUCCALE ET DE L'OREILLE MOYENNE

Par A. NICOLAS, Agrégé, Chef des travaux anatomiques,

Et A. PRENANT, Chef des travaux histologiques

à la Faculté de médecine de Nancy.

Le monstre qui fait l'objet de la présente observation est un agneau nouveau-né, dont la tête seule était malformée et par suite a exclusivement attiré notre attention [1].

Ce qui frappe les regards dans la monstruosité en question, c'est, en même temps qu'une fissure palatine complète, la présence d'une large perte de substance transversale qui prolonge en arrière l'ouverture buccale bien au delà du lieu habituel des commissures. On peut dire, pour nous servir d'une expression vulgaire, que cet animal a la bouche fendue jusqu'aux oreilles, et même au delà. Ce caractère, qui domine toute la monstruosité, d'une bouche démesurément agrandie, pourrait peut-être suffire à qui voudrait imposer un nom au cas dont il s'agit ici, pour faire adopter l'expression de *megalostome,* par laquelle

1. La tête de ce monstre nous a été envoyée par le Dr E. Legrain, qui, à l'autopsie de l'animal, n'avait rien découvert dans le reste du corps qui pût être intéressant. Nous remercions vivement notre confrère de nous avoir mis à même d'examiner un cas tératologique assez remarquable.

Gurlt a désigné des malformations analogues. Nous lisons en effet dans Gurlt[1], au chapitre intitulé *Monstruositates per fissuras alienas :*

« Spaltung der Wangen (*Fissura buccalis congenita*) ist bei den Thieren in drei verschiedenen Graden vorgekommen... In einem höheren Grade reicht die Spalte bis an die Ohren, so dass die Paukenhöhlen unten offen sind (*Megalostomus*). Diese Form kam bei 4 Lämmern vor. Otto hat bei einem Lamme und einem Kalbe diese Spaltung beobachtet. »

Cette monstruosité ne se trouve ni décrite ni figurée dans aucun des différents ouvrages de tératologie que nous avons pu consulter. Elle ne rentre dans aucun des genres établis par I. Geoffroy Saint-Hilaire ; Vrolik, Ahlfeld ne la figurent pas ; Panum ne la signale pas davantage ; quant à l'ouvrage d'Otto dans lequel, au dire de Gurlt, se trouvent rapportés deux cas, nous n'avons pu, à notre grand regret, nous le procurer.

Les fissures géniennes bi-latérales ne sont pas absolumem semblables à la malformation que nous allons décrire. On en connaît des observations (chez l'homme) parmi lesquelles nous citerons celles de Muralt, de Langenbeck, de Fergusson et d'autres encore rassemblées dans le mémoire de Debout (*Bulletin thérapeutique,* 1862) et signalées dans le travail de Roulland (*Bullet. Soc. anat.*, 1886).

D'autre part, et malgré que ces fissures soient accompagnées généralement de perturbations anatomiques dans le domaine des os ou des organes voisins (maxillaire inférieur, oreille), l'ensemble des troubles tératologiques que présente notre cas paraît lui donner une individualité distincte.

### *Examen extérieur.*

Vue de profil (Pl. I), lorsque la mâchoire supérieure et la mâchoire inférieure ont été quelque peu rapprochées, l'ouverture buccale a la forme d'un V horizontalement placé, dont la pointe serait arrondie, et dont les branches seraient inégales, la branche

1. Gurlt, *Die neuere Literatur über menschliche und thierische Missgeburten.* (*Virchow's Archiv,* Bd. 74, 1878.)

supérieure, qui correspond à la lèvre supérieure, étant plus longue que la branche inférieure. En effet, de la partie antérieure du nez à la commissure buccale, on compte $9^{cm},6$, tandis que la lèvre inférieure n'a que $8^{cm},5$. Il en résulte que la symphyse maxillaire est en retrait sur l'extrémité du nez d'un peu plus de 1 centimètre.

Toutefois observons que, dans la situation droite de la tête, la mâchoire inférieure retombe au-devant du cou ; la cavité buccale apparaît alors largement béante [1].

Au-dessous de l'angle arrondi qui représente la commissure de la large ouverture buccale, on voit de chaque côté un pavillon. Au-dessus de la même commissure est appendue une petite languette cutanée contenant un cartilage de forme triangulaire, qui dès l'abord semble un lambeau de pavillon, détaché de la portion principale.

En se reportant à la photographie (Pl. II) qui représente une vue de face de la tête, et qui a été disposée de façon à montrer surtout l'intérieur de la cavité bucco-naso-pharyngienne, on peut décomposer la paroi de cette cavité en trois régions, que nous distinguerons en supérieure, inférieure et intermédiaire.

1° La région inférieure, formant un plan oblique en bas et en avant, est constituée par la langue derrière la base de laquelle se trouvent l'épiglotte et l'entrée du larynx, par la muqueuse buccale, par les arcades dentaires et la lèvre inférieure. Les arcades dentaires sont fortement déjetées en dehors, de telle sorte que la face interne des dents regarde en haut et un peu en dedans. La lèvre inférieure, étroite en avant, sur le tiers antérieur de ses parties latérales, s'élargit en arrière où elle se couvre de papilles nombreuses et très développées, et forme ainsi un bourrelet qui s'épaissit graduellement d'avant en arrière pour se terminer par un rebord arrondi.

2° La région intermédiaire (Pl. II, R *i*), verticale, peut être elle-même subdivisée en trois parties : une moyenne et deux latérales.

La partie moyenne, de forme trapézoïdale, dont le plus grand

1. La mâchoire inférieure affecte alors une situation intermédiaire entre celle qu'on lui a donnée dans la planche I et celle qu'elle a dans la planche II.

diamètre transversal mesure 21 millimètres, tandis que son diamètre vertical est de 16 millimètres, n'est autre que la face postérieure du pharynx. Le long de la ligne médiane de cette partie descend, en s'atténuant, une crête muqueuse (*c*), qui plonge dans le pharynx même, où on la perd de vue.

Les parties latérales sont inclinées à angle obtus sur la partie moyenne, et regardent en dehors et en avant. Elles offrent à constater les détails suivants. Sur une certaine étendue de chacune des parties latérales, la muqueuse est déprimée en une fossette (Pl. II, F), plus profonde du côté droit que du gauche; le fond de la fossette est anfractueux, et laisse apercevoir sous la muqueuse une saillie arrondie et blanchâtre. Au-dessous de la fossette, à l'union de la peau et de la muqueuse, près des attaches du pavillon, la muqueuse est soulevée par un anneau osseux, qui encadre une dépression arrondie (O M), où l'on peut reconnaître des osselets de l'ouïe. A la jonction de la partie latérale et de la base du crâne, on trouve une rainure que limitent deux rebords saillants, de consistance cartilagineuse; cette rainure est allongée d'avant en arrière et de dedans en dehors, et aboutit extérieurement à la fossette anfractueuse dont il a été question tout à l'heure.

3° La région supérieure ne nous arrêtera pas longtemps. Elle est caractérisée, ainsi que nous l'avons déjà fait pressentir, par une large fissuration de la voûte palatine. Cette perte de substance intéresse presque tout l'espace compris entre les arcades dentaires supérieures, ne laissant en connexion avec elles qu'un étroit rebord osseux qui l'encadre sur tout son pourtour, c'est-à-dire aussi bien en avant que sur les parties latérales. En arrière et de chaque côté, en un point qui correspond à l'extrémité postérieure du rebord osseux, vestige de la voûte palatine, on observe un petit appendice charnu et mobile qui paraît représenter la moitié très réduite et presque méconnaissable du voile du palais complètement divisé.

Au travers de la perforation on aperçoit sur la ligne médiane le bord inférieur de la cloison des fosses nasales (C N) qui se prolonge en arrière sur la paroi postérieure du pharynx, pour y former la crête dont nous avons signalé plus haut l'existence. De

chaque côté apparaissent les cornets inférieurs saillants dans les fosses nasales largement béantes.

Nous aurions voulu faire une observation anatomique complète. Malheureusement, ainsi que nous en avait prévenus M. Legrain, l'animal avait été tué sans précaution par le berger, et son crâne se trouvait fracturé en plusieurs endroits, de sorte que nous dûmes nous contenter d'étudier les principales particularités de notre monstruosité et renoncer à une dissection minutieuse.

Nous allons donc reprendre chacune des régions que nous avons distinguées, signalant les quelques détails que nous avons été à même d'observer et cherchant à les interpréter.

## RÉSULTATS DE LA DISSECTION.

### *Région intermédiaire.*

Dans cette région les parties latérales seules présentent de l'intérêt. Nous y avons décrit deux fossettes : l'une antérieure, ou plus élevée ; l'autre postérieure, ou située plus bas. Que sont ces deux fossettes ?

Dans la première, nous avons signalé plus haut, parmi les anfractuosités, une saillie osseuse. Celle-ci, ouverte, s'est trouvée n'être autre chose que le limaçon. Une fossette, dans laquelle le limaçon fait saillie, ne peut appartenir qu'à la caisse du tympan, qu'elle représente en partie. D'autre part, dans la deuxième fossette, à laquelle aboutit le conduit auditif externe, nous trouvons un osselet de l'ouïe et une membrane du tympan. Cette fossette est donc aussi une portion de la caisse tympanique. Nous arrivons ainsi rapidement à ce résultat, que la caisse du tympan est ici largement béante et représentée par deux dépressions éloignées l'une de l'autre, comme les deux valves d'une coquille que l'on aurait disjointes.

L'une de ces dépressions est la paroi externe de la caisse. Elle est limitée par une cupule osseuse (*cu*, fig. 1 et 2), qui se prolonge par en bas vers le conduit auditif cartilagineux, qui lui fait suite.

On peut décrire à cette cupule deux faces, une supérieure concave, et une inférieure convexe. La concavité de la face supérieure se trouve divisée en deux étages superposés, d'inégale grandeur, par la membrane du tympan (T *y*). Celle-ci, de forme circulaire, d'un diamètre de 3, 5 millimètres, orientée comme l'est d'ailleurs la cupule elle-même, est à peu près horizontale, quoique légèrement tournée en dehors, sur la tête telle qu'on la voit placée dans la planche I. La membrane du tympan s'insère à la cupule osseuse sur deux petites crêtes semi-lunaires. Si l'on enlève la membrane tympanique, on tombe dans un petit recessus, qui n'est autre que l'étage inférieur, et l'on aperçoit l'embouchure du conduit auditif cartilagineux. Il devient alors vraisemblable que le recessus en question représente le conduit auditif osseux déformé. Les rapports de la membrane du tympan et du conduit auditif ne sont d'ailleurs pas exactement ceux que l'on observe à l'état normal, la membrane du tympan étant devenue ici oblique sur le conduit auditif, au point que son plan est presque parallèle à l'axe de ce dernier. Sur la face supérieure du tympan (face interne d'un tympan normalement dirigé), est appliqué, suivant toute la longueur du diamètre transversal de la membrane, le manche du marteau légèrement incurvé (fig. 2, *m t*). La tête du marteau, située hors des limites de la membrane du tympan, vient se loger dans une brèche que présente le pourtour de la cupule osseuse. C'est qu'en effet, le bord de cette dernière, replié sur lui-même en forme d'ourlet, plus large en arrière qu'en avant, est interrompu en dehors, au niveau de l'endroit où le conduit auditif cartilagineux s'attache à l'os.

La face inférieure convexe est régulière et lisse (fig. 3), sauf en avant et en bas où l'on voit un petit os qui s'enfonce dans une scissure de la paroi de la cupule sans avoir avec celle-ci d'autres connexions que des rapports de contiguïté. Cet osselet, prolongé jusqu'à paraître sur la face concave de la cupule, se continuerait avec le marteau dont il représenterait, du moins par la direction, l'apophyse grêle. Toutefois, hâtons-nous d'ajouter que ce n'est là qu'une signification hypothétique imposée à cet osselet.

A l'os cupuliforme est appendu un osselet plus considérable que le précédent et qui, en raison de ses rapports avec le maxillaire

inférieur, sera avec plus de fruit examiné en même temps que ce dernier. Enfin, quand nous aurons dit qu'à la cupule osseuse est suspendue la chaîne des os hyoïdiens, nous aurons terminé ce qu'il y a à dire sur cet os, ses rapports et, en général, sur la dépression qui représente la paroi externe de la caisse du tympan.

La paroi interne de la caisse (fossette supérieure), à part les nombreuses anfractuosités qui en accidentent le fond et le limaçon qui y fait saillie, ne présente rien de particulier à noter. Nous avons trouvé cependant, au fond de l'une de ces anfractuosités et seulement du côté droit, un petit osselet ovoïde qui pourrait bien être un étrier très réduit ou une portion de l'étrier (?). Du reste, rien qui corresponde aux fenêtres, ovale ou ronde, de l'oreille moyenne[1].

On se rappelle que, de la portion la plus élevée du pharynx part une rainure *t è* (fig. D), limitée par deux rebords saillants, qui suit une direction oblique en dehors et en arrière pour aboutir à la fossette supérieure dont il a été tout à l'heure question et que nous considérons comme la paroi interne de la caisse du tympan. Si nous tenons compte de la direction générale de cette gouttière, du lieu où elle aboutit de part et d'autre, de la nature cartilagineuse enfin de ses rebords, nous n'aurons pas de peine à voir dans cette rainure une trompe d'Eustache transformée en gouttière par suite de l'absence de la muqueuse qui forme d'habitude son plancher.

Entre les deux fossettes supérieure et inférieure, que nous considérons comme les deux valves d'une oreille moyenne béante,

1. En somme nous n'avons trouvé qu'un marteau et un étrier, encore ce dernier est-il plus que problématique, et aucune trace de l'enclume. A ce propos, nous avons cherché si les anomalies des osselets de l'ouïe ne présentaient pas quelque fixité et des caractères en rapport avec ceux des malformations des parties voisines. Il résulte, au contraire, des travaux dont nous avons pu prendre connaissance que les osselets sont soumis à des anomalies extrêmement variables, tant sous le nombre des pièces que par rapport à leur état anatomique et à leurs connexions. Le lecteur qui voudra être édifié sur le bien-fondé de notre remarque pourra consulter les mémoires de Lincke (*Handbuch der Ohrenheilkunde*, Bd. I), de Schwartze (in *Klebs' Handbuch d. pathol. Anatomie*, Lief. 6), de Wallmann (*Virchow's Archiv*, Bd. XI, de Meyer (*Langenbeck's Arch.*, Bd. XXIX). Dans ce dernier travail se trouvent rapportés quatorze cas où les malformations des osselets se présentent sous les formes les plus diverses.

est tendue une muqueuse que l'on peut rattacher à la paroi postérieure du pharynx avec laquelle elle se continue, et qui est doublée d'une couche musculaire que le scalpel n'a pu analyser.

Pour en finir avec les parties latérales de la région intermédiaire, disons deux mots des lobes du pavillon que nous avons distingués en supérieur et inférieur. Ce dernier (*p i*, fig. I et fig. V), de beaucoup le plus considérable, se continue avec le conduit auditif (*c a*). Il donne insertion à plusieurs muscles (*a u*, fig. V) dans lesquels nous renonçons à retrouver les muscles normaux du pavillon de l'oreille du mouton. Le lobe supérieur, très réduit, donne aussi insertion à des muscles plus difficiles encore à nommer que ceux qui mouvaient le lobe inférieur[1].

### *Région inférieure.*

Rappelons l'existence d'un bourrelet situé de chaque côté en dehors de l'extrémité postérieure de l'arcade dentaire inférieure ; ce bourrelet est dû au soulèvement de la muqueuse par une glande (*voir* pl. II et III, fig. 1, $g\,l^2$). La muqueuse de la lèvre inférieure est doublée par des fibres musculaires à direction antéro-postérieure qui s'insèrent sur le bord postérieur et un peu sur la face externe du maxillaire, et qui représentent assez bien une portion du buccinateur ou alvéolo-dentaire (*a d*, fig. V).

C'est la constitution et les rapports du maxillaire inférieur qui sont les plus intéressants à examiner. La branche horizontale de cet os est fortement tordue sur son axe et incurvée en S selon ses bords ; sa face externe est concave de haut en bas, sa face interne convexe dans le même sens. Celle-ci (fig. IV) présente de

1. Il existe un certain nombre de cas de dislocation du pavillon de l'oreille. Dans le cas de Heusinger (*Specimen malæ conformationis organorum auditus humani*, etc., Jenæ, 1824, refer. in *Lincke's Handb. der Ohrenheilk.*), il existait à la place du pavillon deux petits lobes cutanés éloignés l'un de l'autre, placés au-dessus et au-dessous du conduit auditif externe, auxquels s'attachent les muscles rétracteurs et le muscle élévateur. Virchow (*Ueber Missbildungen am Ohr und im Bereiche des ersten Kiemenbogens* [*Virchow's Archiv*, Bd. 30]) a trouvé chez un enfant le pavillon remplacé de chaque côté par plusieurs appendices auriculaires. Dans deux cas de Fergusson, le tragus était tiré en bas vers le côté de la face, et se trouvait à 1 centimètre au-dessous et en avant de sa situation normale (Fergusson, cité par Roulland).

nombreux reliefs et anfractuosités. On ne trouve pas de branche montante bien caractérisée ; seulement l'extrémité postérieure de l'os maxillaire est pourvue de deux apophyses, à peu près d'égale importance, juxtaposées, l'une étant située un peu en avant et en dedans de l'autre. Il faut évidemment voir dans ces deux apophyses les représentants de la coronoïde et du condyle de la mâchoire inférieure.

Les rapports du maxillaire inférieur avec les os voisins sont les suivants. Nous avons signalé, comme s'attachant par des trousseaux fibreux à la cupule osseuse qui limite en partie la caisse du tympan, un petit os qui, vu du dehors, présente une face convexe, de forme losangique (fig. II, *x*), tandis que sa face interne est excavée et se trouve partagée, par une crête tranchante verticale, en deux fossettes d'à peu près égale capacité (fig. IV, *x*). Dans chacune de ces fossettes s'engagent respectivement la coronoïde et le condyle. La face externe convexe, située immédiatement sous la muqueuse, donne insertion à un petit muscle auriculaire. Que représente cet os ? Nous avouons franchement notre ignorance à cet égard [1].

Les seuls muscles prenant insertion sur le maxillaire inférieur

1. Dans des cas tératologiques plus ou moins comparables au nôtre, on a signalé des difformités de la mâchoire inférieure et de la partie adjacente du temporal. Ainsi, Canton (*Path. Soc. Transac.*, 1861) cite l'observation d'une jeune fille de 16 ans, chez laquelle il a constaté l'absence totale de la branche montante gauche ; à la place il y avait deux petites pointes osseuses auxquelles s'attachaient les muscles et les ligaments (Canton, cité par Roulland). Dans un cas de Wreden (*Beschreibung und Kritik einer angeborenen Missbildung des Ohres*, etc. [*Saint-Petersb. med. Zeitschr.*, Bd. 13, 1867]), la mâchoire inférieure était en retrait sur la supérieure, les processus condyloïde et coronoïde extraordinairement grands, difformes ; il n'y avait ni tête articulaire, ni fosse glénoïde. Virchow (*loc. cit.*) a trouvé la moitié droite du maxillaire inférieur très courte, les processus condyloïde et coronoïde absents, le maxillaire se terminant en arrière par un ligament solide, attaché au temporal dans la région du tubercule articulaire. Roulland (*Bull. Soc. anat.*, 1886) rapporte l'observation d'une enfant chez laquelle la partie horizontale droite du maxillaire ne supportait pas de branche montante ; elle était seulement terminée par une lamelle osseuse très mince et longue de 2 millimètres environ ; il n'y avait ni apophyses coronoïde et condylienne, ni tête articulaire. A la petite pointe osseuse qui les remplaçait venaient s'attacher les muscles et les ligaments qui suspendent le maxillaire aux os de la tête. De plus, absence totale de cavité glénoïde, et distance d'environ 1 centimètre entre la base de l'apophyse zygomatique et l'extrémité du maxillaire.

étaient : pour la face interne, un digastrique assez réduit, surtout dans son ventre antérieur, et s'insérant très en arrière sur le maxillaire ; un mylo-hyoïdien, un génio-glosse, un génio-hyoïdien ; pour la face externe, le buccinateur (alvéolo-dentaire), dont il a déjà été question, et enfin un petit muscle rayonné (*m a*, fig. 5) descendant du bord antérieur de l'os énigmatique (*x*) et venant s'épanouir sur la partie la plus reculée de la face externe du maxillaire, affectant ainsi la direction et la forme générale d'un masséter qu'il représenterait sous des dimensions réduites. Nous n'avons rien trouvé en fait de ptérygoïdiens. Quant au temporal, il s'insérait dans une fosse temporale très minime sous une arcade zygomatique très courte ; pour ce qui est de ses attaches inférieures, la présence d'une ecchymose considérable nous a empêchés de le découvrir.

En disant que l'appareil hyoïdien était normal, nous aurons terminé la description de la région inférieure et de tout ce qui s'y rattache.

*Région supérieure.*

Nous avons fort peu de choses à ajouter à ce que nous a révélé l'examen extérieur de cette région. Rappelons le petit rudiment de voile du palais. En arrière et en dehors de ce dernier, on voyait une saillie ovoïde (*g l*', fig. I) due à l'existence d'une glande. La lèvre supérieure renferme un muscle qui paraît n'être autre chose que l'autre moitié de l'alvéolo-dentaire.

Nous regrettons de n'avoir pas pu pousser plus à fond nos investigations et en particulier de n'avoir pas pu examiner la base du crâne. On a vu quelles sont les raisons qui nous en ont empêchés. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que d'abord il n'existait certainement pas de cavité glénoïde et que, d'autre part, la base du crâne semblait dépourvue des reliefs (ailes du sphénoïde, bulle tympanique, par exemple) qui, à l'état normal, la rendent si irrégulière.

Nous croyons utile de faire suivre la description qui précède de quelques considérations sur la façon dont a pu se produire cette monstruosité. Chercher à en donner une explication étiolo-

gique serait une tâche téméraire, sinon impossible. Tout ce qu'il est permis de faire, c'est de mettre sous les yeux du lecteur les dispositions normales chez l'embryon, de leur comparer les malformations que nous avons observées, et de voir quel a pu être le chemin parcouru par l'évolution tératologique. Des perversions du développement aussi considérables que celles que présente notre monstre n'ont pu être amenées que par des causes énergiques, bien limitées et agissant très symétriquement. Les malformations sont concentrées dans la région auriculaire. Or, nous savons que cette région, reportée à la topographie de l'embryon, y est représentée par la première fente branchiale et les arcs adjacents. Ce sont donc ces parties dont il convient d'examiner les dispositions chez l'embryon. On sait que les fentes branchiales, en général, et la première, en particulier, après avoir été considérées comme de véritables fentes, ont été regardées plus tard par His comme de simples sillons ecto- et ento-blastiques, et qu'enfin, dans ces derniers temps, plusieurs auteurs (Liessner, Kastschenko) ont montré qu'il existait réellement, au niveau de plusieurs d'entre elles, des trous (*Schlundloch*) ou des fissures (*Schlundfurche*) faisant communiquer la cavité pharyngienne avec l'extérieur.

Il en est ainsi pour la première fente, la seule qui nous intéresse spécialement; elle présente à son extrémité dorsale un orifice de ce genre.

Rappelons maintenant les principales opinions sur le développement de l'oreille moyenne. Il est très généralement établi que la première fente, quelle que soit l'idée qu'on s'en fasse, qu'on la considère comme ouverte ou fermée, partiellement ou en totalité, contribue, soit dans toute sa longueur, soit dans une partie de son étendue, à la formation de l'oreille moyenne et de l'oreille externe. C'est ce qui ressort des observations de Kölliker, His, Moldenhauer, Hoffmann. Nous lisons, en effet, dans Hertwig (*Lehrbuch der Entwickelungsgeschichte,* p. 380), sous forme de conclusion : « Das mittlere und das äussere Ohr sind von dem oberen Theil der ersten Schlundspalte (dem Spritzloch der Selachier) und ihrer Umrandung abzuleiten. Aus der Verschlussplatte der ersten Schlundspalte nebst angrenzenden Theilen der Schlund-

bogen entwickelt sich das Trommelfell, welches ursprünglich ziemlich dick ist und sich erst allmählich zu einer durchsichtigen Membran verdünnt. Aus einer Bucht an der Innenseite des Trommelfells, dem Sulcus tubotympanicas, und aus einer nach oben, aussen und hinten gerichteten Aussackung derselben entstehen die Paukenhöhle und die Eustachische Röhre. Der äussere Gehörgang entwickelt sich aus der Umrandung der nach aussen vom Trommelfell gelegenen Bucht, und die Ohrmuschel aus 6 Höckern, die sich zum Tragus, Antitragus, Helix, Anthelix und zu dem Ohrläppchen umgestalten. »

Ces données ont été cependant modifiées par les recherches de Gradenigo (la *Riforma medica,* 1886) et de N. Kastschenko (*Arch. f. mik. anat.,* 1887). Gradenigo, entre autres conclusions, dit : « Per quanto riguarda la tromba, lo spazio tubo-timpanico ai lati del cranio nei primissimi stadi, quando le parti scheletriche nell' embrione sono appena accennate, è rappresentato non solo dalla prima fessura branchiale, ma anche dalla fessure che restano tra le superficie interne dei primi due archi branchiali e la parete laterale del cranio. Ora sono per lo appunto queste ultime fessure al lato interno degli archi branchiali, quelle che, subendo una serie die complicate ma ben determinate modificazioni, prodotte dal modo di sviluppo delle parti scheletriche vicine, si trasformano da ultimo nello spazio tubo-timpanico, mentre il segmento interno della vera fessura branchiale finisce col chiudersi.

« La cavità tubo-timpanica non deve essere perciò riguardata come una estroflessione del canale intestinale verso l'indietro ; ma è già fino dai primi stadi dello sviluppo rappresentata da uno spazio molto più grande, che subisce più tardi un processo parziale di involuzione. »

Voici, d'autre part, ce que dit Kastschenko (*loc. cit.,* p. 7 et suiv.) :

« Wir können also den äusseren Gehörgang als Derivat der ersten epidermoïdalen Tasche betrachten, weil er wirklich aus der Verlängerung der Wandungen der letzteren entsteht ; aber wir müssen keinesfalls diese zwei Bildungen identificiren, weil der äussere Gehörgang eine secundäre Bildung ist. Die wirklichen

Reste der ersten epidermoïdalen Tasche stellen die nach vorn gerichtete innere Spitze des äusseren Gehörganges und die Fossa intercruralis dar... » Et plus loin : « ...Damit wird der Raum der primären Paukenhöhle relativ bedeutend vermindert. Jetzt wird dieselbe von vorn durch den hinteren Rand des ersten und von hinten durch den jetz nach vorn gekehrten früheren inneren Rand des zweiten Schlundbogens begrenzt. Zu gleicher Zeit bildet sich das knorpelige Labyrinth, schiebt sich gegen die primäre Paukenhöhle und verengt besonders den inneren Abschnitt derselben... Es folgt aus den oben besprochenen Thatsachen, dass der mittlere Gehörgang keineswegs aus der ersten Schlundspalte, sondern in Folge der Verengung des Seitentheiles des embryonalen Schlundes entsteht... Das äussere und mittlere Ohr muss ich für secondäre Bildungen ansehen... Nach meinen Reconstructionsbildern schliesse ich, dass wenigstens der grösste Theil des Trommelfells aus dem vorderen Theile des zweiten Schlundbogens gebildet wird... »

Voyons maintenant comment nous pouvons, à l'aide de ces notions, nous faire une idée des modifications que ces parties ont dû subir pour aboutir à la monstruosité que nous avons observée. Pour cela, mettons tout d'abord en regard des faits d'embryologie normale précédemment rapportés les dispositions tératologiques que notre monstre présentait.

Nous avons affaire à deux malformations : 1° une fissuration palatine ; 2° une large ouverture de la bouche et du pharynx et de l'espace tubo-tympanique. Ces deux dispositions anormales sont-elles génétiquement indépendantes l'une de l'autre, ou bien reconnaissent-elles une seule et même origine ; et, dans ce dernier cas, quel est le lien qui les unit ? Autant de questions auxquelles il est impossible de répondre. Car si, d'une part, les deux régions malformées sont assez voisines pour avoir pu être modifiées par un agent unique, d'autre part, les lésions qui les intéressent peuvent s'expliquer par des mécanismes très différents. La fissuration palatine peut être rattachée, comme on le fait d'habitude, à un arrêt de développement. Quant à l'ouverture bucco-pharyngo-auriculaire, elle demande à être examinée de plus près. Résumons en quoi elle consiste.

Elle est caractérisée essentiellement :

1° Par une large ouverture de la bouche et du pharynx ;

2° Par l'ouverture à l'extérieur de l'espace tubo-tympanique et la dislocation en deux valves de l'oreille moyenne, transformation de la trompe en une gouttière ;

3° Par l'abaissement du maxillaire inférieur, son atrophie et sa déformation ;

4° Par la disjonction du pavillon en deux lobes ;

5° Par des osselets imparfaits et numériquement réduits ;

6° Enfin par des formations osseuses en rapport avec la cavité de l'oreille moyenne et avec le maxillaire.

Comment faut-il modifier l'état normal pour réaliser ces malformations ?

En admettant d'abord un arrêt dans le développement des joues, une fissuration génienne complète tant en longueur qu'en hauteur, étendue en arrière jusqu'au bord antérieur de la branche montante du maxillaire, un bec-de-lièvre génien double en d'autres termes, nous obtenons la large ouverture buccale que nous avons ici.

L'ouverture de la cavité tubo-tympanique à l'extérieur peut être rapportée, soit à la persistance d'un pertuis normal de la première fente branchiale, soit à la production tératologique d'un orifice.

En effet, l'existence d'un trou (*Schlundloch*) conduisant du dehors dans l'espace tubo-tympanique et son agrandissement assurent une large communication de l'extérieur avec l'oreille moyenne. Si nous précisons la situation de ce trou, nous trouvons que, vu du dehors, il correspond à l'extrémité dorsale de la première fente, et qu'au-dessous de lui sont situés « les véritables restes de la première poche épidermique », et, plus inférieurement encore, l'entrée du conduit auditif. Ce dernier, se trouvant ainsi au-dessous de l'endroit où la monstruosité a débuté, a pu être épargné par elle. Nous pouvons supposer d'ailleurs que le pertuis de la première fente branchiale n'a pas seul persisté, mais que celui de la deuxième fente a eu le même sort, que les deux trous se sont ensuite confondus en un orifice unique.

Si nous n'admettons pas l'existence du trou normal dont il vient d'être question, il nous faut imaginer qu'il s'est fait une perforation anormale grâce à laquelle la cavité tubo-tympanique s'est ouverte à l'extérieur. Nous pouvons, à ce sujet, faire intervenir l'abaissement du premier ou même du deuxième arc, abaissement qui existe en réalité, puisque les dérivés des deux premiers arcs sont séparés de la base du crâne avec laquelle ils n'ont plus de connexions que par l'intermédiaire des parties molles. Ce processus ouvre largement l'espace tubo-tympanique, dont il déplace par en bas toute la paroi externe, que nous savons formée, si l'on en croit Gradenigo et Kastschenko, non seulement par le fond du sillon ectodermique de la première fente, mais encore par la face interne des deux premiers arcs.

Quant à la dislocation en deux valves de l'oreille moyenne, le déplacement des deux premiers arcs, ces derniers n'eussent-ils agi que par leur propre poids, en donne une explication suffisante.

Dans tous les cas, l'abaissement du maxillaire est encore nécessaire, dès lors que l'on veut réunir l'hiatus buccal à l'orifice de la première fente, et des deux ne faire qu'une seule et même cavité.

Pour ce qui est des causes de l'abaissement du maxillaire, nous n'entendons pas les rechercher ici. On conçoit seulement que ce déplacement ait été suivi de l'atrophie de l'extrémité supérieure du maxillaire privée de ses attaches normales, et que les changements survenus dans les rapports de l'os aient pu en entraîner la déformation générale.

Telles sont les modifications que l'on peut apporter à l'état normal pour produire les dispositions tératologiques les plus essentielles que nous avons eues sous les yeux.

Quant à imposer à ces modifications un ordre chronologique, de nature à faire croire qu'elles sont reliées les unes aux autres par des relations de cause à effet, que, par exemple, c'est l'abaissement du maxillaire inférieur qui a été le point de départ du processus tératologique, ou que ce sont, au contraire, les malformations bucco-pharyngiennes qui en ont été le prélude, c'est ce que nous ne tenterons pas de faire.

Pour ce qui concerne les dispositions tératologiques que nous

avons observées du côté du pavillon de l'oreille, des osselets, des formations osseuses en rapport avec la cavité de l'oreille moyenne et du maxillaire, nous les considérons comme accessoires, et comme vraisemblablement secondaires.

Le pavillon de l'oreille était séparé en deux lobes, bien que le conduit auditif fût intact. Mais il n'y a là rien qui doive nous surprendre ; car nous savons que c'est, non pas sur tout le pourtour de l'orifice du conduit auditif externe, mais seulement sur la moitié supérieure de cette circonférence que se développent les éminences qui donnent naissance aux différentes portions du pavillon. Quant au groupement de ces portions en deux lobes distincts, nous pouvons penser que, d'une part, le petit appendice triangulaire (*p s*) est formé par le tragus et peut-être par une partie de l'hélix, c'est-à-dire par les éminences antérieures, tandis que le grand lobe du pavillon (*p i*) a été constitué par le reste des ébauches cartilagineuses. La séparation du pavillon en deux lobes a été suivie de leur écartement.

Les anomalies considérables que nous trouvons, tant dans le nombre que dans la forme des osselets de l'ouïe peuvent être mises sur le compte des conditions anormales dans lesquelles se sont trouvés ces osselets. Tiraillés par le fait de la distension de la caisse du tympan, ils ont perdu leurs rapports et, séparés les uns des autres, ont pu s'atrophier. Peut-être le petit osselet que nous avons trouvé, niché dans une anfractuosité de la paroi interne de l'oreille moyenne, est-il un de ces vestiges appartenant à l'étrier, dont il représenterait les branches soudées par suite de l'absence dans leur intervalle de l'artère stapédieuse, tandis que la lame pédieuse fixée au pourtour de la fenêtre ovale comblerait cette dernière. (On sait que pour Salensky, Gradenigo, Rabl, les branches et la lame de l'étrier ont une origine différente.)

Tel est, d'ailleurs, le sort que subissent d'habitude, ainsi que l'attestent les observations faites sur les anomalies de l'oreille moyenne et de son contenu, les osselets de l'ouïe, quand l'oreille moyenne est le siège de bouleversements comparables à celui qu'elle a éprouvé dans notre cas.

On comprend enfin qu'il a pu et dû se faire des transforma-

tions profondes dans le domaine des os différenciés dans la paroi de l'oreille moyenne et de ceux qui l'avoisinaient plus ou moins directement. L'abaissement du maxillaire ne s'est pas opéré non plus sans entraîner dans la région temporale articulaire des remaniements tels que celle-ci en est devenue presque méconnaissable.

---

## EXPLICATION DES PLANCHES.

### Planche I.

La tête du monstre est représentée de profil. La mâchoire inférieure a été un peu relevée vers la supérieure. En Pi et Ps, les deux lobes inférieur et supérieur du pavillon. En OM, l'oreille moyenne, où l'on aperçoit le marteau. La partie latérale droite de la « région intermédiaire » (voir le texte) est désignée par les lettres Ri.

### Planche II.

Vue de face de la tête du monstre. La mâchoire inférieure a été abaissée au devant du cou, et la supérieure relevée, de façon à rendre largement béante la cavité bucco-naso-pharyngienne. Les lignes pointillées $xx'$ délimitent la « région intermédiaire » (partie moyenne et portions latérales), au-dessus et au-dessous de laquelle se trouvent les régions « supérieure » et « inférieure » (voir le texte).

OM, oreille moyenne; F, fossette dans laquelle fait saillie le limaçon; TE, trompe d'Eustache à l'état de rainure; C, crête médiane qui prolonge sur la paroi postérieure du pharynx la cloison des fosses nasales CN; FI, cavité des fosses nasales visible par l'absence de la voûte palatine; CO, cornets; Ps, Pi, les deux lobes supérieur et inférieur du pavillon de l'oreille.

### Planche III.

Fig. 1. — Cette figure représente la partie latérale droite de la région intermédiaire, la moitié droite de la partie médiane de cette même région, et une portion de la région inférieure.

Pi, lobe inférieur du pavillon; *ps*, lobe supérieur; *ca*, conduit auditif, formé de plusieurs pièces cartilagineuses; *cu*, cupule osseuse qui limite la paroi externe de la caisse du tympan; *f*, fossette qui forme la paroi interne de la caisse; *te*, trompe d'Eustache transformée en gouttière; $gl^1$, $gl^2$, saillies glandulaires; *rp*, rudiment du voile du palais; *c*, crête médiane prolongeant la cloison des fosses nasales; *au*, muscle auriculaire; *li*, ligament tendu de la cupule osseuse au maxillaire; *e*, épiglotte; *l*, langue.

's
i
M
Pi

X'
X'
Fl
C N
Co
TE
TE
F
Ps
OM
OM
P
X
X

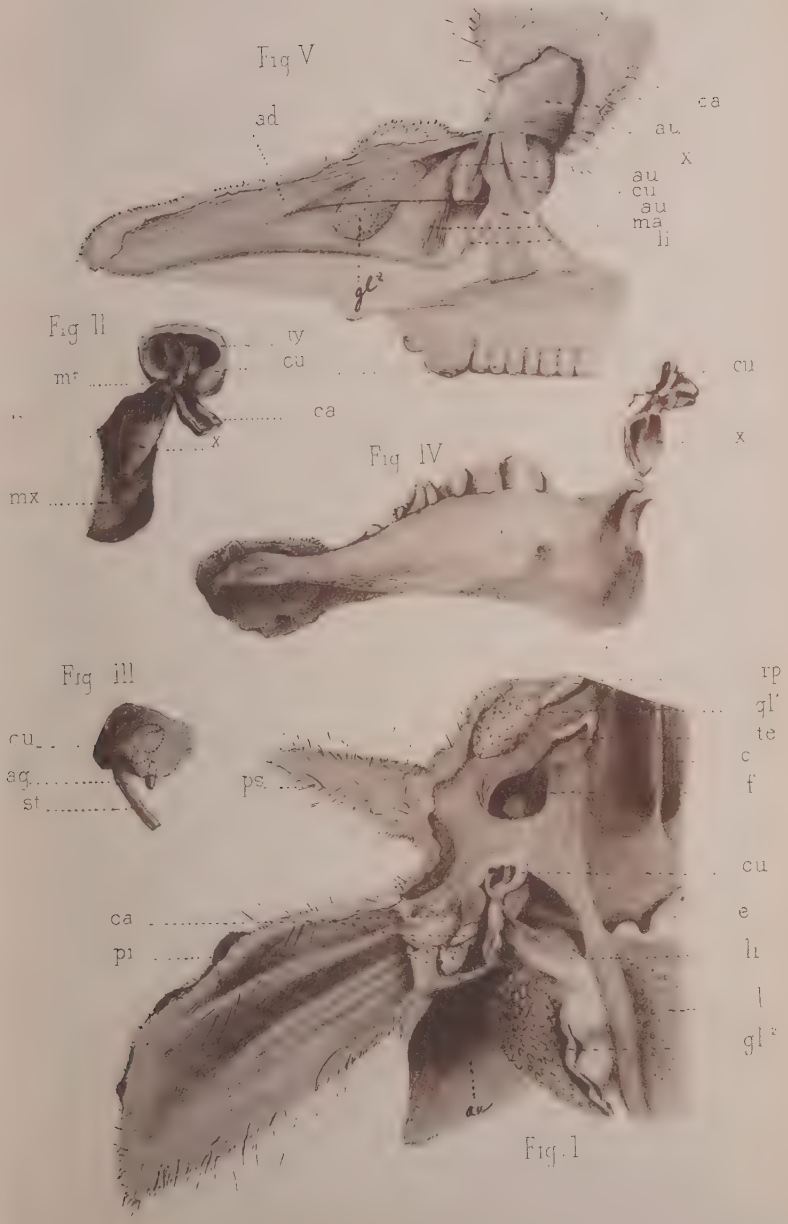


Fig V
ad
ca
au
X
au
cu
au
ma
li
gl²
Fig II
ty
cu
mx
ca
x
Fig IV
cu
x
mx
Fig III
cu
aq
st
ps
rp
gl'
te
c
f
cu
e
h
l
gl²
ca
pi
au
Fig. 1

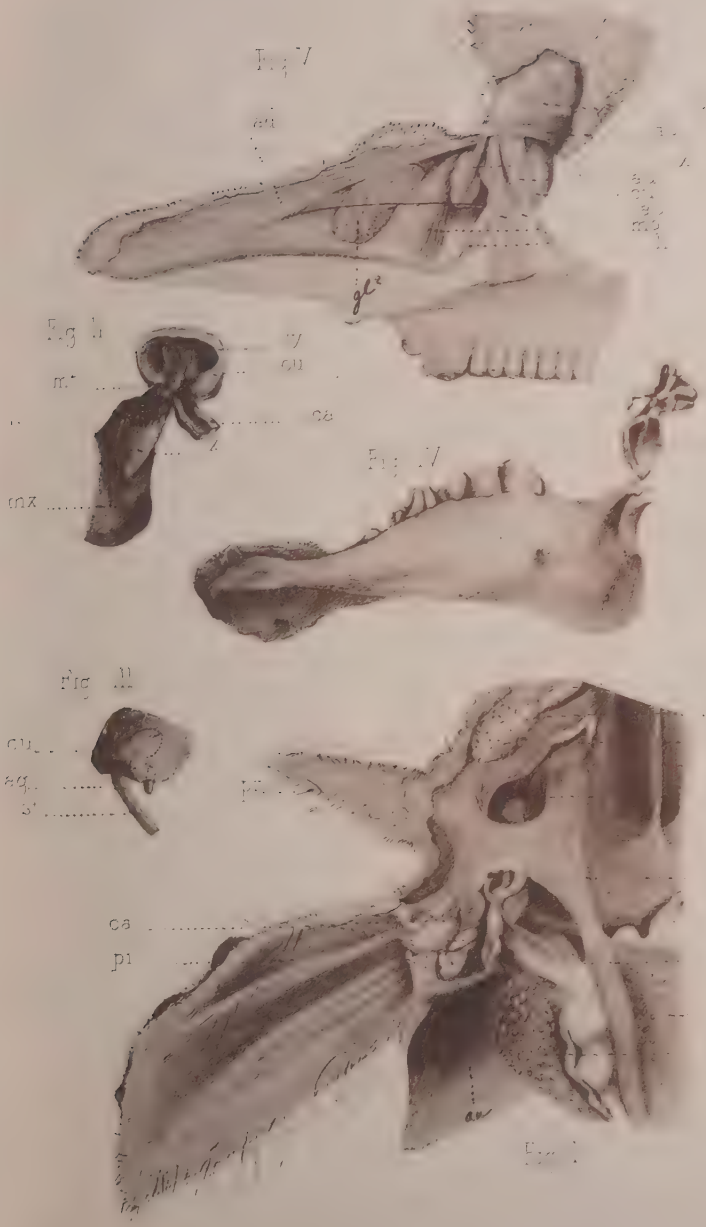


Fig V
Fig h
Fig V
Fig M
ca
pl

Fig. 2. — Cupule osseuse *cu*), avec le tympan *ty*) et le marteau *ml*); *ca*, conduit auditif; *x*, os énigmatique qui coiffait l'extrémité postérieure du maxillaire *mx*).

Fig. 3. — Face inférieure convexe de la cupule osseuse *cu*). En pointillé, on a figuré le contour du tympan et le marteau, visibles sur la face opposée de la cupule; *ag*, apophyse grêle du marteau (?), dont on n'aperçoit que l'extrémité libre; *st*, stylhyal.

Fig. 4. — Face interne du maxillaire. A l'extrémité postérieure de ce dernier, on voit les tubercules qui représentent le condyle et l'apophyse coronoïde. En *x*, se trouve figuré l'os énigmatique suspendu à la cupule osseuse *cu*), et dont la face concave, divisée en deux loges par une crête, s'appliquait sur l'extrémité postérieure de la mâchoire, dont elle a été séparée sur le dessin. (La cupule et l'os énigmatique ont été représentés un peu moindres que de nature.)

Fig. 5. — Face externe du maxillaire, avec les muscles de la région. En *ad*, alvéolo-dentaire; *ma*, masséter rudimentaire; *au*, *au*, *au*, muscles auriculaires; *li*, ligament allant du maxillaire à la cupule *cu*), vue ici par sa face convexe; *ca*, conduit auditif relevé par en haut; *gl*², glande; *x*, os énigmatique en rapport avec le maxillaire; *tr*, trachée.

# ÉTUDE

# DE CINÉMATIQUE

## A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

Par A. CALINON

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

## I

### Généralisation de l'idée du temps. Vitesse.

**1.** En cinématique ordinaire, le temps est mesuré par une variable à une seule dimension, c'est-à-dire qu'un point T du temps est déterminé lorsqu'on se donne la durée qui s'est écoulée entre ce point et une origine fixe. La cinématique est alors l'étude du mouvement des points dépendant tous de cette même variable commune $t$.

Supposons maintenant que le point T du temps se détermine comme un point de l'espace à l'aide de trois coordonnées $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$; nous dirons alors que le temps est une grandeur à trois dimensions, comme l'espace; si le point T reste dans un plan, deux coordonnées suffisent pour le déterminer et l'on a un temps à deux dimensions.

L'idée du temps ainsi généralisée, la cinématique à deux et à trois dimensions est l'étude du mouvement des points dépendant tous d'une même variable commune à deux dimensions $(\alpha, \beta)$ et à trois dimensions $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Il va de soi d'ailleurs que cette cinématique nouvelle est, comme

la cinématique ordinaire, une géométrie pure, la variable commune dont nous venons de parler n'ayant pas de lien nécessaire avec la notion métaphysique du temps ; tout au plus pourrait-on dire que cette cinématique à deux et à trois dimensions serait réalisée dans le monde matériel pour des esprits faits autrement que le nôtre auxquels le temps apparaîtrait, comme l'espace, sous la forme d'une grandeur à deux ou à trois dimensions.

**2.** Remarquons bien d'abord qu'en cinématique à deux ou à trois dimensions tous les mobiles considérés sont comparés au seul mobile particulier que nous avons appelé T. Chaque mobile M a une position correspondant à chaque position de T, de sorte que M engendre une ligne, une surface ou un volume en même temps que T engendre lui-même une ligne, une surface ou un volume.

Si $x$, $y$ et $z$ sont les coordonnées du mobile M et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ celles de T, la dépendance qui existe entre M et T se traduit par trois équations qu'on peut mettre sous la forme :

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1)$$

Ces équations se réduiraient à deux en cinématique à deux dimensions.

Lorsque le point T décrit une certaine étendue, c'est-à-dire une portion de ligne, ou une portion de surface, ou un volume, le point M décrit lui-même, d'après les équations (1), une étendue de même nature et l'étendue décrite par T est en quelque sorte la durée du mouvement de M.

Si en particulier on considère deux étendues infiniment petites décrites simultanément par T et par M, le rapport de ces deux étendues, celle qui est relative à T étant prise comme dénominateur, est la vitesse du point M ; cette vitesse est à une, deux ou trois dimensions, suivant que l'étendue infiniment petite considérée est un élément de ligne, de surface ou de volume.

Nous ajouterons, pour éviter toute équivoque, que l'étendue dont nous venons de parler doit être infiniment petite dans tous les sens ; ainsi une étendue rectangulaire devra être infiniment petite quant à ses deux côtés à la fois, de façon à se réduire à un point en s'évanouissant.

**3.** Si, dans les équations (1), $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont liés par deux équations, le point T décrit une ligne ; soit $t$ la longueur de cette ligne comprise entre une position primitive fixe de T et une position variable. Le point M décrit lui-même une ligne en même temps que T et les coordonnés $x$, $y$, $z$ sont évidemment des fonctions de $t$ et l'on a :

$$x = \varphi_1(t) \qquad y = \varphi_2(t) \qquad z = \varphi_3(t) \qquad (2)$$

On est ainsi ramené à la cinématique ordinaire, cela, sous la seule condition d'appeler $t$ la longueur de l'arc décrit par T. Nous pourrons donc étendre, sans démonstrations nouvelles, toutes les formules, résultant des relations (2), de la cinématique ordinaire à notre cinématique générale dans le cas où les points T et M décrivent des courbes.

Dans ce même cas l'étendue infiniment petite du mouvement de M est un arc infiniment petit $ds$ de la courbe qu'il décrit et cet arc $ds$ correspond à un arc infiniment petit $dt$ décrit par T ; la vitesse de M est alors, d'après notre définition générale (2), le rapport $\frac{ds}{dt}$, ce qui est tout à fait d'accord avec la définition de la vitesse en cinématique ordinaire ; nous considérerons d'ailleurs la vitesse comme une grandeur dirigée représentée par une longueur $\frac{ds}{dt}$ portée sur la tangente en M à la trajectoire. C'est la vitesse à une dimension. Quand cette vitesse est constante, le mouvement est uniforme ; on a alors $\frac{ds}{dt} = k$ ou $s = kt$, ce qui veut dire que M et T décrivent simultanément des arcs proportionnels.

**4.** Passons à la vitesse à d. d.[1] ; désignons par $s$ et $\sigma$ les deux portions de surface infiniment petites que décrivent simultanément M et T ; ces deux éléments de surface peuvent toujours être considérés comme appartenant respectivement aux plans tangents aux surfaces que décrivent M et T ; prenons le plan tangent en T comme plan des $\alpha\beta$ et le plan tangent en M comme plan des $x$

1. Nous emploierons désormais, pour abréger, les notations à *u. d.*, à *d. d.* et à *t. d.* (à une, deux et trois dimensions).

$y$. Le déplacement de M réduit à l'élément $s$ est alors défini par les deux équations

$$x = f_1(\alpha, \beta) \qquad y = f_2(\alpha, \beta) \qquad (1)$$

Cela posé, nous allons montrer que la vitesse à d. d. $\frac{s}{\sigma}$ est bien définie et n'a en chaque point qu'une valeur indépendante de la forme de $s$. Supposons d'abord $\sigma$ triangulaire et soient $\alpha$ $\beta$, $\alpha + d'\alpha$, $\beta + d'\beta$, $\alpha + d''\alpha$, $\beta + d''\beta$, les coordonnées des trois sommets de ce triangle; on a, d'après une formule connue :

$$\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} d'\alpha & d'\beta \\ d''\alpha & d''\beta \end{vmatrix}$$

A ces trois positions de T correspondent trois positions de M dont les coordonnées sont $x\,y$, $x + d'x$, $y + d'y$, $x + d''x$, $y + d''y$ et l'aire $s$ est donnée par la formule :

$$s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix}$$

Mais on a, d'après les équations (1) :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta \quad \text{et} \quad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta,$$

$p_1 q_1$, $p_2$ et $q_2$ étant les valeurs particulières des dérivées partielles pour la position M $(xy)$ ; on en déduit :

$$d'x = p_1 d'\alpha + q_1 d'\beta \quad \text{et} \quad d'y = p_2 d'\alpha + q_2 d'\beta,$$
$$d''x = p_1 d''\alpha + q_1 d''\beta \quad \text{et} \quad d''y = p_2 d''\alpha + q_2 d''\beta.$$

On en conclut immédiatement :

$$\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d'\alpha & d'\beta \\ d''\alpha & d''\beta \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \frac{s}{\sigma} = \begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix}$$

La vitesse à d. d. est donc le déterminant fonctionnel des fonctions (1) et l'on voit que son expression est indépendante de la forme des triangles $s$ et $\sigma$. Si $s$ et $\sigma$ ne sont pas des triangles, on peut toujours les considérer comme des sommes de triangles ; le rapport $\frac{s}{\sigma}$ est donc toujours le même dans tous les cas.

Nous compléterons notre définition de la vitesse à d. d. en disant que cette vitesse est le plan tangent à la surface décrite par M,

plan auquel on associe la valeur du rapport $\frac{s}{\sigma}$ ; on fait ainsi ressortir l'analogie de cette vitesse à d. d. avec la vitesse à u. d.

Nous aurons très souvent à considérer, dans l'étude du mouvement, des points ou des plans auxquels on associe l'idée d'une grandeur ; c'est ce que nous appellerons des points ou des plans numériques : nous dirons aussi très souvent, dans le même ordre d'idées, une droite numérique pour désigner une droite à laquelle est associée une grandeur, comme une vitesse à u. d., il est évident qu'une droite numérique peut toujours se représenter par un segment de cette droite, la longueur du segment étant supposée avoir même mesure que la grandeur associée.

**5.** La vitesse à t. d. est, comme nous l'avons dit (2), le rapport de deux volumes infiniment petits décrits simultanément par M et T. Les formules qui définissent le mouvement de M par rapport à T étant :

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma) \qquad \text{et} \quad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma)$$

on en déduit, en désignant par $p, q, r, \ldots$ les valeurs particulières que prennent les dérivées partielles en M :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma$$
$$dz = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma.$$

Désignons par $s$ et $\sigma$ les deux volumes infiniment petits qu'engendrent M et T et supposons d'abord que $s$ et $\sigma$ soient deux tétraèdres ; on verrait, comme dans le cas précédent, que les volumes de ces tétraèdres sont représentés par deux déterminants dont le rapport est le déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

Telle est l'expression de la vitesse à t. d. La vitesse à t. d. est un point numérique situé en M, point auquel est associée la grandeur que nous venons de définir.

**6.** Reprenons les équations qui définissent le mouvement du point M :

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = f_2(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1)$$

On en déduit :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma$$
$$dz = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma \qquad (2)$$

$p$, $q$, $r$... ayant la même signification que précédemment.

Il suit de là que si l'on considère seulement des déplacements infiniment petits, le mouvement de M est défini simplement par les équations (2) qui sont du premier degré, d'où cette conséquence très importante que, dans des déplacements infiniment petits, les mobiles décrivent tous à la fois des figures homographiques entre elles et homographiques à la figure décrite par T. Cela est général et vrai pour des déplacements à u. d. ou t. d.

Mais la transformation homographique définie par les équations (2) est une transformation particulière ; pour le voir, mettons les équations (2) sous forme finie :

$$x = p_1\alpha + q_1\beta + r_1\gamma \qquad y = p_2\alpha + q_2\beta + r_2\gamma$$
$$z = p_3\alpha + q_3\beta + r_3\gamma \qquad (3)$$

On voit que $x\ y\ z$ deviennent infinis en même temps que $\alpha\ \beta\ \gamma$ ; donc, à un point situé à l'infini dans l'une des figures, correspond un point situé à l'infini dans l'autre figure ; cela revient à dire que cette homographie conserve le parallélisme ; d'où les propriétés suivantes, lesquelles sont évidentes :

Trois points en ligne droite, T, T′ et T″, sont transformés en trois points en ligne droite M, M′ et M″, et l'on a $\frac{T'T}{T'T''} = \frac{M'M}{M'M''}$ ; en particulier, si T′ est le milieu de TT″, M′ est aussi le milieu de MM″.

Une surface du second degré est transformée en une surface du second degré du même genre, c'est-à-dire un ellipsoïde, en un ellipsoïde, etc. ; les centres des deux surfaces sont des points homologues; à un système de diamètres conjugués de l'une correspond un système de diamètres conjugués de l'autre.

De même une conique se transforme en une conique.

Il s'agit donc là, comme on le voit, d'une homographie restreinte et, à moins que nous ne stipulions le contraire, il faudra toujours, dans la suite, prendre ce mot d'homographie dans le sens particulier qui vient d'être indiqué.

## II

## Mouvement d'un point dans un plan.

**7.** Supposons d'abord que les points M et T restent chacun dans leur plan; le mouvement est alors défini par les deux équations :

$$x = f_1(\alpha, \beta) \qquad y = f_2(\alpha, \beta) \qquad (1)$$

et le mouvement infiniment petit autour des positions initiales $M_0$ et $T_0$ est exprimé par les équations différentielles :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta \qquad (2)$$

où $p_1, q_1, p_2$ et $q_2$ sont comme précédemment les valeurs des dérivées partielles en $M_0$ et $T_0$.

Nous savons déjà que la vitesse à d. d. de $M_0$ est :

$$V = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Cherchons maintenant les vitesses à u. d. en $M_0$ pour toutes les trajectoires passant par ce point ; à cet effet, entourons le point $T_0$ d'un cercle $c$ de rayon infiniment petit $T_0 T = dt$.

Quand le point T décrit ce cercle $c$ du centre $T_0$, le point M décrit une courbe homographique, c'est-à-dire (6) une ellipse infiniment petite $e$ de centre $M_0$; nous savons de plus qu'à deux diamètres perpendiculaires du cercle $c$ correspondent deux diamètres conjugués de l'ellipse $e$.

Soient maintenant $T_0 T$ l'élément d'une trajectoire passant par $T_0$ et $M_0 M$ l'élement correspondant décrit par M; la vitesse en $M_0$ à cette trajectoire est dirigée suivant $M_0 M$ et a pour grandeur $\frac{M_0 M}{T_0 T} = v$; soit $M_0 N = v$ cette vitesse, on a $M_0 N = \frac{M_0 M}{dt}$. Il en résulte que si l'on considère toutes les trajectoires de M passant par $M_0$, le point N décrit une ellipse E homothétique à l'ellipse $c$ et concentrique.

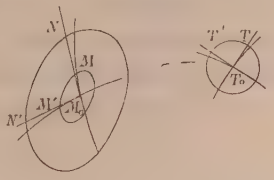
Ainsi le lieu des extrémités des vitesses pour toutes les trajectoires passant par $M_0$ est une ellipse homographique au cercle $e$.

**8.** Les équations des ellipses $e$ et E s'obtiennent d'ailleurs très simplement : l'équation de $e$ s'obtient en éliminant $d\alpha$ et $d\beta$ entre les deux équations (2) et l'équation $d\alpha^2 + d\beta^2 = dt^2$, ce qui donne :

$$\left|\begin{matrix} dx & p_1 \\ dy & p_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dx & q_1 \\ dy & q_2 \end{matrix}\right|^2 = \left|\begin{matrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{matrix}\right|^2 dt^2 = V^2 dt^2 \qquad (3)$$

V étant la vitesse à d. d.

Si l'on désigne par X et Y les rapports $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, l'ellipse homothétique E a évidemment pour équation :



$$\left|\begin{matrix} X & p_1 \\ Y & p_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} X & q_1 \\ Y & q_2 \end{matrix}\right|^2 = V^2 \qquad (4)$$

Nous appellerons cette ellipse l'ellipse des vitesses en $M_0$.

A deux rayons perpendiculaires du cercle $c$ correspondent deux directions conjuguées dans les ellipses $e$ et E : c'est ce que nous exprimerons en disant qu'à deux trajectoires orthogonales passant par $T_0$ correspondent deux trajectoires conjuguées en $M_0$ avec deux vitesses conjuguées $v$ et $v'$; ces deux vitesses étant des diamètres conjugués de l'ellipse E donnent lieu aux relations très connues :

$$v^2 + v'^2 = \text{const.} \qquad vv' \sin \widehat{vv'} = \text{const.} \qquad (5)$$

Dans la seconde de ces équations, la constante est la vitesse à d. d. V ; en effet si $ds$ et $ds'$ sont les deux rayons de l'ellipse $e$ dirigés suivant les rayons $v$ et $v'$ de E, ces deux rayons correspondent à deux rayons perpendiculaires du cercle $c$ ; or le triangle $T_0TT'$ a pour aire $\frac{1}{2} dt^2$, et le triangle correspondant $M_0MM'$ $\frac{1}{2} ds.\ ds' \sin \widehat{vv'}$ ; le rapport de ces deux aires étant V (4), il vient :

$$V = \frac{ds.ds'.\ \sin \widehat{vv'}}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds'}{dt} \sin \widehat{vv'} = vv' \sin \widehat{vv'}.$$

**9.** Deux trajectoires conjuguées en $M_0$ ne peuvent être perpendiculaires que si elles sont dirigées suivant les axes de l'ellipse E : ces axes sont donc les directions des deux seules trajectoires or-

thogonales en $M_0$ qui correspondent à deux trajectoires orthogonales en $T_0$ ; on conclut de là, par un raisonnement de proche en proche très connu, qu'il existe un système de trajectoires orthogonales de M et un seul correspondant à un système de trajectoires orthogonales de T.

Ces trajectoires orthogonales de M sont tangentes en chaque position de M aux axes de l'ellipse des vitesses ; les vitesses $v_a$ et $v_b$ y sont les axes mêmes de cette ellipse ; nous appellerons ces vitesses vitesses principales.

On a, d'après cela, les relations :

$$v_a^2 + v_b^2 = v^2 + v'^2 \qquad v_a v_a = vv' \sin \widehat{vv'} \text{ V}.$$

Ainsi le produit des deux vitesses principales en un point est la vitesse à d. d. en ce point.

L'équation (4) de l'ellipse E, développée, se met sous la orme :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = V^2$$

A, B et C étant des fonctions de $\alpha$ et $\beta$. Les directions des axes de cette ellipse sont donc fournies par l'équation :

$$B \operatorname{tg}^2 \varphi + (A\text{-}C) \operatorname{tg} \varphi - B = 0.$$

Cette équation donne donc, en chaque position de M, les coefficients angulaires des tangentes aux deux trajectoires orthogonales, de sorte que si l'on désigne par $\frac{dy}{dx}$ l'un de ces coefficients angulaires la relation précédente devient :

$$B \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (A\text{-}C) \frac{dy}{dx} - B = 0.$$

Ce qui est l'équation différentielle des trajectoires orthogonales. Il faut bien remarquer que l'on peut concevoir pour M une infinité de systèmes de trajectoires orthogonales, mais celles dont nous venons de parler sont les seules qui correspondent à des trajectoires orthogonales de T.

**10.** Cherchons les trajectoires de vitesse constante ; soit $v$ cette vitesse constante ; on aura en M la direction de la trajectoire pour laquelle la vitesse est $v$ en cherchant dans l'ellipse des vitesses un rayon de longueur $v$ ; soit $\theta$ l'angle de ce rayon avec l'axe des $x$,

on a, X et Y étant les coordonnées de l'extrémité de ce rayon, $X = v \cos\theta$, $Y = v \sin\theta$; portons ces valeurs dans l'équation de l'ellipse des vitesses, il vient :

$$(A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)\,v^2 = V^2$$

ou

$$A - \frac{V^2}{v^2} + 2B\,\mathrm{tg}\,\theta + \left(C - \frac{V^2}{v^2}\right)\mathrm{tg}^2\theta = 0.$$

Cette équation donne les deux directions de trajectoires pour lesquelles la vitesse en M est $v$. Dès lors, comme précédemment, l'équation différentielle de ces trajectoires est :

$$A - \frac{V^2}{v^2} + 2B\frac{dy}{dx} + \left(C - \frac{V^2}{v^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

D'une position donnée $M_0$ part une trajectoire de mouvement uniforme correspondant à chaque valeur de $\theta$; on pourra donc en général trouver une ou plusieurs valeurs particulières de $\theta$ telles que la trajectoire considérée partie de $M_0$ aboutisse à une seconde position donnée M; donc, en général, on peut aller d'un point à un autre par une trajectoire de mouvement uniforme.

Citons encore, comme trajectoires intéressantes, celles pour lesquelles la vitesse à d. d. est constante; leur équation est évidemment :

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{d\alpha} & \frac{df_1}{d\beta} \\ \frac{df_2}{d\alpha} & \frac{df_2}{d\beta} \end{vmatrix} = K.$$

Nous avons à peine besoin d'ajouter que dans cette équation, comme d'ailleurs dans les précédentes, on suppose que $\alpha$ et $\beta$ sont remplacés par leurs expressions en $x$ et $y$.

La vitesse V ne peut être nulle qu'en certains points dont l'ensemble constitue la courbe qui a pour équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{d\alpha} & \frac{df_1}{d\beta} \\ \frac{df_2}{d\alpha} & \frac{df_2}{d\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

En ces points l'ellipse des vitesses se réduit à une ligne droite. Pour que V fût nul en un point quelconque, il faudrait que le

déterminant fonctionnel qui exprime V fût constamment nul, c'est-à-dire que les fonctions $f_1$ et $f_2$ ne fussent pas distinctes ; il y aurait alors entre $f_1$ et $f_2$, c'est-à-dire entre $x$ et $y$, une relation de la forme $\varphi(x\,y) = 0$, de sorte que, T se déplaçant d'une façon quelconque dans son plan, M resterait constamment sur une courbe.

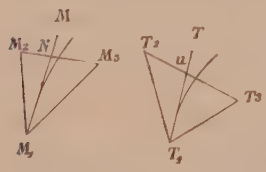
**11.** Si laissant de côté toute idée de mouvement ainsi que les idées de vitesse à u. et à d. d. qui s'y rattachent, nous envisageons simplement les équations :

$$x = f_1(\alpha, \beta), \qquad y = f_2(\alpha, \beta)$$

comme définissant un point M en fonction d'un autre point T, nous nous trouvons en présence du problème général de la transformation des figures dans un plan.

Il résulte donc de là et de ce qui a été dit précédemment (6) que, dans un mode quelconque de transformation, deux figures infiniment petites correspondantes sont homographiques ; il s'agit, bien entendu, ici de l'homographie particulière dont nous avons parlé (6).

Soient, d'après cela, trois positions infiniment voisines $M_1$, $M_2$ et $M_3$ correspondant aux trois positions $T_1$, $T_2$ et $T_3$ ; deux positions correspondantes quelconques M et T se rattacheront aux précédentes d'une façon très simple.




Traçons $TT_1$ et $MM_1$, lesquels rencontrent respectivement $T_2\,T_3$ en U et $M_2\,M_3$ en N ; d'après les propriétés de l'homographie particulière dont il s'agit (6) on aura :

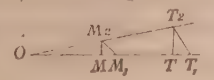
$$\frac{NM_2}{NM_3} = \frac{UT_2}{UT_3} \qquad \text{et} \qquad \frac{MM_1}{MN} = \frac{TT_1}{TU}.$$

Ces relations déterminent le point M correspondant au point T. Ainsi la connaissance des deux triangles considérés permet de construire la figure infiniment petite en M correspondant à la figure en T.

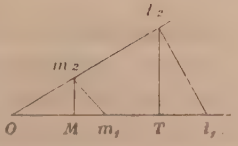
Soit, d'après cela, une courbe en $T_1$ ayant pour tangente $T_1\,U$, sa transformée en $M_1$ aura pour tangente $M_1\,N$. On peut ainsi,

étant donnée une courbe quelconque en $T_1$, trouver la tangente à sa transformée en $M_1$.

**12.** Prenons un exemple : les deux points correspondants M et T sont sur une droite passant par le point fixe O, et leurs distances respectives à O, $r$ et $\rho$, sont liées par la relation $f(r\rho) = 0$ ; on a, pour tous les points infiniment voisins de deux points particuliers M et T, la relation $a\,dr + b\,d\rho = 0$, $a$ et $b$ étant les valeurs des dérivées partielles $\frac{df}{dr}$ et $\frac{df}{d\rho}$ en M et T. Déplaçons T suivant $TT_1$ sur la droite OT, M décrira également un élément $MM_1$ de cette même droite et l'on aura, d'après la relation $\frac{dr}{d\rho} = -\frac{b}{a}$,




$\frac{MM_1}{TT_1} = -\frac{b}{a}$, ce qui détermine $MM_1$. Décrivons de O comme centre un arc infiniment petit $TT_2$, $\rho$ restant constant quand T décrit cet arc, $r$ reste aussi constant d'après l'équation $f(r\rho) = 0$ ; M décrit donc un arc $MM_2$ de centre O et vient sur la droite $OT_2$. On a ainsi deux triangles correspondants $MM_1M_2$ et $TT_1T_2$ ; dès lors les tangentes à deux courbes correspondantes, passant par M et T, couperont les droites $M_1M_2$ et $T_1T_2$ dans le même rapport. On peut du reste remplacer les deux triangles infiniment petits par deux triangles finis de côtés proportionnels : à cet effet, prenons $Tt_1$ quelconque, mais fini ; prenons $Mm_1$ tel que l'on ait $\frac{Mm_1}{Tt_1} = \frac{MM_1}{TT_1} = -\frac{b}{a}$ ; élevons à OT les perpendiculaires $Mm_2$ et $Tt_2$ jusqu'à une même droite, d'ailleurs quelconque, passant par O. Les deux triangles $Mm_1m_2$ et $Tt_1t_2$ de côtés finis peuvent remplacer les triangles $MM_1M_2$ et $TT_1T_2$ pour le tracé des tangentes aux courbes correspondantes passant par M et T.




Nous savons aussi que le rapport de deux aires infiniment petites correspondantes en M et T est indépendant de la forme des contours qui enveloppent ces aires (4). Dans le cas actuel ce rapport a pour valeur :

$$\frac{MM_1M_2}{TT_1T_2} = \frac{MM_1}{TT_1} \cdot \frac{MM_2}{TT_2} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\rho}.$$

**13.** Reprenons l'ellipse E des vitesses homothétique à l'ellipse infiniment petite $e$ que décrit M quand T décrit un petit cercle $c$ (7); E a pour équation (9).

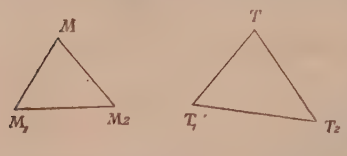
$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = V^2.$$

Pour que cette ellipse devienne un cercle il faut qu'on ait $B = 0$ et $A = C$; ces deux équations en $\alpha$ et $\beta$ déterminent un certain nombre de positions de T et les positions correspondantes de M ont des cercles comme ellipses des vitesses.

Considérons une position de M remplissant cette condition; le rayon $v$ du cercle des vitesses en ce point est la vitesse commune relative à toutes les trajectoires qui y passent.

Deux directions perpendiculaires en T donnent en M deux directions conjuguées, c'est-à-dire également perpendiculaires, puisque E est un cercle; ainsi deux trajectoires orthogonales quelconques en T donnent en M deux trajectoires orthogonales. La vitesse à d. d. V devient évidemmment égale à $v^2$ (9).

Prenons en M et T deux triangles infiniment petits correspondants $MM_1M_2$ et $TT_1T_2$; M décrit les éléments de trajectoires $MM_1$ et $MM_2$ avec la même vitesse $v$, ainsi que nous venons de le voir; on a donc $\frac{MM_1}{TT_1} = \frac{MM_2}{TT_2} = v$; mais on a aussi $\frac{M_1M_2}{T_1T_2} = v$, car, lorsque $MM_1M_2$ s'évanouit, $M_1M_2$ est aussi l'élément d'une trajectoire passant par M. Donc les deux triangles $MM_1M_2$ et $TT_1T_2$ ont leurs trois côtés proportionnels et sont semblables; le rapport de similitude est $v$.




Cela s'étend évidemment à deux figures quelconques infiniment petites en M et T. Donc, aux points où l'ellipse E devient un cercle, les points M et T décrivent simultanément des figures infiniment petites semblables et le rapport de similitude est le rayon $v$ de ce cercle.

La réciproque est vraie, car si M et T décrivent des figures semblables, lorsque T décrit un cercle $c$, M décrit une courbe semblable, c'est-à-dire un cercle, et l'ellipse des vitesses qui est une courbe homothétique est aussi un cercle.

En résumé, dans ce cas particulier, l'homographie se restreint encore (6) et devient la similitude.

La similitude conservant les angles, on en déduit que deux trajectoires en M se coupent sous le même angle que leurs trajectoires correspondantes en T.

**14.** En général, il n'y a qu'un certain nombre de positions de M pour lesquelles l'ellipse E est un cercle : mais il peut arriver aussi que cela ait lieu pour une position quelconque.

Nous allons en citer deux exemples. Soit $z = f(t)$ une fonction réelle ; supposons maintenant qu'on donne à $t$ une valeur imaginaire $t = \alpha + i\beta$, $z$ prend alors la forme $z = x + iy$. Représentons ces valeurs imaginaires de $t$ et $z$ par les points T $(\alpha\ \beta)$ et M $(x\ y)$ ; l'équation $z = f(t)$, qui se décompose alors en deux par la séparation des parties réelle et imaginaire, définit le mouvement de M par rapport à T. Donnons à $t = \alpha + i\beta$ un accroissement infiniment petit $dt$ représenté par un élément TT′ ; il en résulte pour M un accroissement $dz$ représenté par l'élément TT′ et le module de la dérivée $f'(t)$ est le rapport $\frac{MM'}{TT}$, c'est-à-dire la vitesse $v$ de M suivant la direction MM′.

Or, dans une fonction d'une variable imaginaire, la dérivée, et par conséquent son module, doit être indépendante de la variation $dz$, c'est-à-dire de la direction de TT′ ; donc la vitesse $v$ est la même pour toutes les directions. Ainsi, dans ce cas, l'ellipse E des vitesses est toujours un cercle.

On déduit de là que deux figures infiniment petites décrites simultanément par M et T sont semblables et que les trajectoires de M se coupent sous le même angle que les trajectoires de T.

Notre second exemple sera celui de la transformation par rayons vecteurs réciproques ; on sait que ce mode de transformation appliqué à un cercle reproduit un autre cercle : si donc T décrit un cercle infiniment petit $c$, l'ellipse $e$ décrite simultanément par M est aussi un cercle et par suite l'ellipse des vitesses E homothétique à $e$ est un cercle. Par suite, tout ce que nous avons dit précédemment sur la similitude des figures correspondantes infiniment petites, sur la conservation des angles des trajectoires est applicable à ce mode de transformation.

Dans ces deux exemples, le premier correspond au cas où, dans la cinématique ordinaire, on considérerait le temps $t$ comme susceptible de prendre des valeurs imaginaires.

**15.** Il est évident que les équations $x = f_1(\alpha\,\beta)$ et $y = f_2(\alpha\,\beta)$ qui définissent le mouvement du point M par rapport au point T peuvent être présentées sous la forme plus générale $f_1(x\,y\,\alpha\,\beta) = 0$, $f_2(x\,y\,\alpha\,\beta) = 0$.

Considérons, par exemple, la série des coniques homofocales définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1. \qquad (1)$$

On a, en développant l'équation par rapport à $\lambda$ :

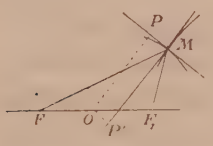
$$\lambda^2 - (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\lambda + a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0. \qquad (2)$$

D'où, en appelant $\alpha$ et $\beta$ les racines de cette équation en $\lambda$ :

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = \alpha + \beta \quad a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = \alpha\beta. \qquad (3)$$

Prenons ces équations comme définissant le mouvement du point M $(x\ y)$ par rapport au point T $(\alpha\ \beta)$.

Les équations $\alpha =$ const. et $\beta =$ const. représentent pour T deux séries de droites perpendiculaires, par conséquent des lignes orthogonales : or à ces droites correspondent précisément les diverses coniques orthogonales : représentées par l'équation (1) ; ces coniques sont donc les trajectoires orthogonales de M correspondant aux trajectoires orthogonales de T (9). On en conclut que l'ellipse des vitesses en M a ses axes dirigés suivant les tangentes aux deux coniques de la série (1) passant en ce point ou, ce qui revient au même, dirigés suivant les bissectrices des droites MF et $MF_1$, F et $F_1$ étant les foyers communs des coniques (1). Cherchons la vitesse $v$ du point M quand il décrit une conique (1) correspondant, par exemple, à la droite $\beta = k$ décrite par T. Lorsque T décrit le chemin infiniment petit $d\alpha$ sur cette droite, le point M décrit sur la conique l'arc $ds$, et la vitesse en ce point est $\frac{ds}{d\alpha}$. Mais la première des équations (3) donne, $\beta$ étant constant :




$$d\alpha = 2(x\,dx + y\,dy) = 2\,ds\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

$\varphi$ étant l'angle de $ds$ avec l'axe des $x$, c'est-à-dire l'angle de la tangente à l'ellipse avec cet axe : or $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ est évidemment la projection de OM sur cette tangente ; si donc P est la projection de O sur la tangente, on a :

$$d\alpha = 2\,ds.\mathrm{MP} \qquad \text{ou} \qquad \frac{ds}{d\alpha} = v = \frac{1}{2.\mathrm{MP}}.$$

Ainsi cette vitesse $v$ est inversement proportionnelle à la projections de OM sur la tangente.

Si l'on considère la seconde conique (1) qui passe par M, la vitesse $v'$ en M suivant cette conique a de même pour expression :

$$v' = \frac{1}{2.\mathrm{MP'}},$$

P' étant la projection de O sur la tangente à cette conique. Ces deux vitesses sont les axes de l'ellipse des vitesses en M laquelle se trouve ainsi déterminée.

La vitesse V à d. d. en M est, comme on le sait, le produit $vv'$ (9) ; on a donc : $V = \frac{1}{4.\mathrm{MP}.\mathrm{MP'}}$ ; ainsi V est inversement proportionnel à l'aire rectangulaire OPMP'.

## III

## Mouvement d'un point dans l'espace.

**16.** Les notations étant les mêmes que précédemment (6), le mouvement à t. d. d'un point est défini par les relations :

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (1)$$

et le mouvement infiniment petit par les équations différentielles :

$$\begin{gathered} dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma, \\ dz = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma. \end{gathered} \qquad (2)$$

Si nous astreignons le point T ($\alpha$ $\beta$ $\gamma$) à rester sur une surface, N décrit aussi une surface : les trois variables $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ sont alors

liées par une équation, celle de la surface que décrit T ; elles sont donc réduites en réalité à deux variables indépendantes et le déplacement de M est à d. d. Lorsque, dans ces conditions, on ne considère que des déplacements infiniment petits de T et de M, on peut toujours supposer que ces déplacements s'effectuent respectivement dans les plans tangents en T et M aux surfaces que décrivent ces points. Que l'on prenne encore, si l'on veut, ces plans tangents pour plans des $\alpha\beta$ et des $xy$ et l'on voit qu'on est ramené identiquement au cas de déplacements plans étudié ci-dessus. De là les conséquences suivantes qui sont évidentes.

Désignons par $\Sigma$ et S les surfaces décrites par T et M et soient $T_0$ et $M_0$ les positions initiales de T et M. Lorsque le point T décrit autour de $T_0$ comme centre sur la surface $\Sigma$ un cercle infiniment petit de rayon $dt$, le point M décrit une ellipse $e$ homographique sur la surface S ; à cette ellipse infiniment petite correspond une ellipse homothétique finie E située dans le plan tangent à S, c'est l'ellipse des vitesses pour toutes les trajectoires passant par $M_0$ situées sur S. Deux vitesses conjuguées, c'est-à-dire dirigées suivant des diamètres conjugués de E, sont liées par les relations

$$v^2 + v'^2 = \text{const.} \qquad vv' \sin \widehat{vv'} = \text{const.} = V$$

V étant la vitesse à d. d. On a également, $v_a$ et $v_b$ étant les vitesses principales dirigées suivant les axes de l'ellipse E, $v_a v_b = V$.

Enfin, les directions de ces vitesses principales définissent en chaque point de S deux trajectoires orthogonales de M qui correspondent à deux trajectoires orthogonales de T sur la surface $\Sigma$.

Pour certaines positions de M sur S l'ellipse E des vitesses devient un cercle ; dans ce cas, le déplacement infiniment petit de M est une figure semblable à celle que décrit T et deux trajectoires quelconques de M forment le même angle que les trajectoires correspondantes de T.

Nous terminerons en disant qu'il y a sur S, comme dans le mouvement plan, des trajectoires de vitesse à u. d. constante, et des trajectoires où la vitesse à d. d. est constante.

**17.** Reprenons maintenant le déplacement infiniment petit de M d'après les relations (2) ; à cet effet, supposons que le point T

décrive autour du point initial $T_0$ une sphère de rayon $dt$ ; le point M décrit alors une figure homographique (6), c'est-à-dire un ellipsoïde infiniment petit $e$ de centre $M_0$.

Si nous divisons par $dt$ un rayon de cet ellipsoïde, nous obtenons évidemment la vitesse du point M suivant la direction de ce rayon et l'extrémité de cette vitesse engendre un ellipsoïde fini E, homothétique au précédent et homographique à la sphère de rayon $dt$ ; c'est l'ellipsoïde des vitesses.

Si le point T décrit un élément de surface passant par $T_0$, cet élément de surface peut être confondu avec son plan tangent, lequel coupe la sphère $T_0$ suivant un grand cercle.

Le point M décrit simultanément un élément de surface dont le plan tangent coupe $e$ et E suivant des ellipses, et la section elliptique ainsi obtenue dans l'ellipsoïde E est évidemment l'ellipse des vitesses du point M quand ce point se déplace sur la surface considérée.

On obtient l'équation de l'ellipsoïde $e$ en éliminant $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ entre les trois équations (2) et l'équation $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = dl^2$.

Un calcul tout à fait analogue à celui que nous avons indiqué dans le plan (8) donne ainsi les équations de $e$ et E :

$$\begin{vmatrix} dx & q_1 & r_1 \\ dy & q_2 & r_2 \\ dz & q_3 & r_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & r_1 & p_1 \\ dy & r_2 & p_2 \\ dz & r_3 & p_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & p_1 & q_1 \\ dy & p_2 & q_2 \\ dz & p_3 & q_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}^2 dl^2$$

$$\begin{vmatrix} X & q_1 & r_1 \\ Y & q_2 & r_2 \\ Z & q_3 & r_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & r_1 & p_1 \\ Y & r_2 & p_2 \\ Z & r_3 & p_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & p_1 & q_1 \\ Y & p_2 & q_2 \\ Z & p_3 & q_3 \end{vmatrix}^2 = V^2$$

V étant la vitesse à t. d. (5).

**18.** A trois trajectoires se coupant orthogonalement en $T_0$ correspondent trois trajectoires en $M_0$ dirigées suivant trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E et nous avons ce que nous appellerons trois vitesses conjuguées $v$, $v'$ et $v''$ ; en particulier, lorsque les trois diamètres sont les axes principaux de l'ellipsoïde, on a les trois vitesses principales $v_a$, $v_b$, $v_c$.

Comme on le sait, le volume du parallélipipède construit sur $v$, $v'$ et $v''$ comme côtés est constant et égal à $v_a v_b v_c$, c'est-à-dire à V ; c'est la même démonstration qu'en cinématique plane (8).

On a ainsi la relation

$$v^2 + v'^2 + v''^2 = v_a^2 + v_b^2 + v^2.$$

Soit P le plan des vitesses $v'$ et $v''$ ; la vitesse à d. d. V' suivant la direction de ce plan est $v'v''\sin\widehat{v'v''}$ (9) ; nous l'appellerons vitesse à d. d. conjuguée à la vitesse $v$. Si l'on désigne par $\widehat{vP}$ l'angle de $v$ et du plan P, le volume du parallélipipède construit sur $v$, $v'$ et $v''$ est le produit de sa base $v'v''\sin\widehat{v'v''} = V'$ par sa hauteur $v\sin\widehat{vP}$ ; on a donc entre $v$ et V' la relation :

$$vV'\sin\widehat{vP} = V.$$

Mettons l'équation de l'ellipsoïde E sous la forme :

$$A_1X^2 + A_2Y^2 + A_3Z^2 + 2B_2B_3YZ + 2B_3B_1ZX + 2B_1B_2XY = V^2.$$

Il est généralement impossible que cette équation représente une sphère, car cela implique cinq conditions entre les coefficients $A_1A_2A_3$, $B_1B_2$ et $B_3$ qui ne contiennent que les trois variables $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

Mais on peut exprimer que la surface est de révolution en posant :

$$A_1 - \frac{B_2B_3}{B_1} = A_2 - \frac{B_3B_1}{B_2} = A_3 - \frac{B_1B_2}{B_3}.$$

Ces deux équations en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ représentent une courbe et la courbe correspondante en M est le lieu des points où l'ellipsoïde E est de révolution.

Considérons dans l'ellipsoïde E relatif à un point quelconque $M_0$ les deux sections circulaires $C_1$ et $C_2$ ; lorsque le point M se meut sur une surface S tangente en $M_0$ au plan d'un de ces cercles, $C_1$ par exemple, ce cercle est l'ellipse des vitesses relative à ce déplacement (17) ; nous en concluons que le déplacement infiniment petit sur S à partir de la position initiale $M_0$ est semblable au déplacement correspondant de T (13). Ainsi en chaque point $M_0$ il y a deux plans pour lesquels cette similitude existe : toutefois, quand l'ellipsoïde E devient de révolution, ces deux plans des sections circulaires se réduisent à un.

Nous avons dit qu'en général l'ellipsoïde E ne peut devenir une

sphère ; mais il est évident que ce cas peut néanmoins se présenter pour certaines formes particulières des équations du mouvement : or il résulte évidemment de ce qui précède que quand l'ellipsoïde E est une sphère, le déplacement infiniment petit de M autour de $M_0$ dans une direction quelconque est semblable au déplacement de T.

**19.** Considérons le cas particulier où la vitesse à t. d. V est nulle ; posons donc :

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation en $\alpha, \beta, \gamma$ représente une surface à laquelle correspond également une surface en $x$, $y$, $z$. Or on a (18) $V = v_a\, v_b\, v_c$ ; il faut donc, pour que V soit nul, qu'une des vitesses $v_c$, c'est-à-dire un des axes de l'ellipsoïde E, soit nulle ; dans ce cas, l'ellipsoïde se réduit comme on sait à un plan, ou plutôt à une ellipse située dans ce plan P. Quand cela a lieu, à une trajectoire quelconque passant par $T_0$ correspond toujours en $M_0$ une trajectoire située dans le plan P, du moins quant à son premier élément. De même à une surface quelconque passant par $T_0$ correspond en $M_0$ une surface toujours tangente au plan P. Reprenons les équations différentielles du mouvement :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \qquad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma,$$
$$dz = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma,$$

et supposons que l'on prenne le plan P pour plan des $x\,y$ ; dans ce cas, le point M restant toujours dans le plan P, $dz$ doit être nul, ce qui exige $p_3 = 0$, $q_3 = 0$, $r_3 = 0$. Le mouvement est alors défini par les deux équations :

$$dx = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma \quad \text{et} \quad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma$$

et il ne diffère du mouvement dans le cas général où $dz$ n'est pas nul que par cette circonstance que le point dans l'espace est remplacé par sa projection sur le plan P : donc le point M, au lieu de décrire l'ellipsoïde $e$, décrit la projection de cet ellipsoïde sur le plan P, c'est-à-dire qu'il se déplace dans l'intérieur de cette ellipse.

Cela s'étend à l'ellipsoïde des vitesses E et à l'ellipse E′ projection de E sur le plan P. Il suit de là qu'on obtient une vitesse à u. d. de M en joignant le centre de l'ellipse E′ à un point quelconque situé à l'intérieur de E′ et non pas seulement situé sur la circonférence de E′ ; cette remarque est fondamentale, car elle sépare nettement le mouvement elliptique à d. d. du mouvement elliptique à t. d.

Des considérations tout à fait analogues nous amèneraient à considérer l'ellipsoïde réduit à une droite comme la projection sur cette droite d'un véritable ellipsoïde ; dans ce cas, toutes les trajectoires de M sont tangentes à cette droite.

**20.** Comme en cinématique plane (11), les équations générales du mouvement

$$x = f_1(\alpha\beta\gamma) \qquad y = f_2(\alpha\beta\gamma) \qquad z = f_3(\alpha\beta\gamma)$$

peuvent aussi représenter simplement un mode de transformation des figures dans lesquelles le point M ($x\ y\ z$) se déduirait du point T ($\alpha\ \beta\ \gamma$). Il suit de là que deux figures infiniment petites correspondantes sont homographiques. Si en particulier T décrit une sphère infiniment petite, M décrit un ellipsoïde et dans les plans des sections circulaires de cet ellipsoïde les figures sont semblables à leurs correspondantes (18). Si dans les deux figures infiniment petites correspondantes on se donne deux tétraèdres correspondants, on peut construire le point M correspondant au point quelconque T ; on le démontre comme pour le cas du triangle en cinématique plane (11). L'homographie étant ainsi définie par ces deux tétraèdres, on peut construire la tangente à une courbe en M connaissant la courbe correspondante en T ; de même du plan tangent à une surface.

Ces considérations sont tout à fait analogues à celles que nous avons exposées dans le plan.

Enfin lorsqu'à une sphère infiniment petite décrite par T correspond pour M une sphère, l'homographie devient une similitude. Cela a lieu, par exemple, quand le point M se déduit du point T par rayons vecteurs réciproques ; on sait en effet que ce mode de transformation fait correspondre une sphère à une sphère.

Dans ce cas, la transformation conserve dans la figure M l'angle de deux courbes ou de deux surfaces de la figure T.

**21.** Appliquons la théorie précédente à un exemple tout à fait analogue à celui que nous avons donné en cinématique plane (15). Soit la série des surfaces du second degré homofocales définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1. \qquad (1)$$

Cette équation développée par rapport à $\lambda$ devient

$$\lambda^3-(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)\lambda^2+B\lambda+C=0 \quad (2)$$

de sorte que, si $\alpha$ $\beta$ et $\gamma$ sont ses trois racines, on a :

$$x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=\alpha+\beta+\gamma. \qquad (3)$$

Les autres coefficients B et C qui sont des fonctions de $x$, $y$, $z$ donnent encore deux autres relations entre $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ lesquelles jointes à la relation (3) définissent le mouvement du point M ($x$ $y$ $z$) par rapport au point T ($\alpha$ $\beta$ $\gamma$). Considérons deux positions initiales correspondantes $M_0$ et $T_0$ ; si T se déplace parallèlement au plan des $\beta$ $\gamma$ par exemple, $\alpha$ est constant et par suite M se déplace sur l'une des surfaces (1) ; on en déduit immédiatement que pour des déplacements de T parallèles aux trois axes, et par suite perpendiculaires entre eux, le point M se déplace sur les trois courbes d'intersection des trois surfaces homofocales (1) qui passent par $T_0$; ces trois surfaces étant orthogonales, leurs intersections sont perpendiculaires et sont par suite dirigées suivant les axes de l'ellipsoïde des vitesses en $M_0$ (18).

Cherchons donc ces trois vitesses principales $v_a$ $v_b$ $v_c$, $v_a$ étant la vitesse sur l'intersection des deux surfaces homofocales passant par $M_0$ et correspondant à $\beta$ = const. et $\gamma$ = const.

Soit $ds$ l'élément de cette intersection décrit par M quand T décrit $d\alpha$ ; désignons de plus par $l$, $m$, $n$ les cosinus des angles que $ds$ fait avec les axes des coordonnées ; on a $v_a=\dfrac{ds}{d\alpha}$ ; de plus, l'équation (3) différentiée, $\beta$ et $\gamma$ étant des constantes, donne :

$$d\alpha=2(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=2\,ds\,(lx+my+nz).$$

Or $lx + my + nz$ représente la projection sur la direction de $ds$ ou de $v_a$ du rayon $OM_0$ qui joint le centre des surfaces (1) au point $M_0$; si $\rho_a$ est cette projcetion, on a :

$$v_a = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{2\rho_a}, \quad \text{et de même :} \quad v_b = \frac{1}{2\rho_b}, \quad v_c = \frac{1}{2\rho_c}.$$

Ainsi les vitesses principales sont inversement proportionnelles aux projections de $OM_0$ sur leurs directions respectives.

Sur la surface (1) correspondant à $\alpha = \text{const.}$, la vitesse à d. d. est : $v_b v_c = \frac{1}{4\rho_b\rho_c}$ (16). Enfin, la vitesse à t. d. est : $v_a v_b v_c = \frac{1}{8\rho_a\rho_b\rho_c}$ (18).

Ainsi la vitesse à d. d. est inversement proportionnelle à l'aire du rectangle construit sur les côtés $\rho_b$ $\rho_c$ et la vitesse à t. d. inversement proportionnelle au volume du parallélipipède construit sur les côtés $\rho_a$ $\rho_b$ $\rho_c$.

Nous rappelons que sur la surface $\alpha = \text{const.}$ les trajectoires orthogonales dont nous venons de déterminer les vitesses $v_b$ et $v_c$, sont précisément les lignes de courbure de cette surface.

## IV

## Mouvement des points numériques.

**22.** Considérons des points matériels $M_1\ (x_1\ y_1\ z_1)$, $M_2\ (x_2\ y_2\ z_2)$, etc., ayant respectivement pour masses $m_1$, $m_2$, etc., et soit M $(x\ y\ z)$ leur centre de gravité de masse $m$ égale à $\Sigma m_1$, on a les formules connues :

$$m = \Sigma m_1 \quad mx = \Sigma m_1 x_1 \quad my = \Sigma m_1 y_1 \quad mz = \Sigma m_1 z_1 \quad (1)$$

Cela posé, faisons abstraction de l'idée de masse et considérons les quantités $m\ m_1$.. comme des coefficients numériques attachés aux points M $M_1$..., la construction géométrique du centre de gravité peut subsister telle quelle ; nous l'appellerons seulement la composition des points numériques $(M_1\ m_1)$, $(M_2\ m_2)$, etc..... ;

les points ($M_1$ $m_1$), etc., sont les points composants et le centre de gravité ($M$ $m$) est le point résultant du système.

Ces dénominations nouvelles ont l'avantage de présenter cette théorie sous une forme purement géométrique indépendante de l'idée de masse qui n'y est pas nécessaire ; elles font de plus ressortir certaines analogies avec une autre théorie corrélative, celle de la composition des plans numériques que nous exposerons plus loin.

Le produit $m_1 x_1$ est ce que nous appellerons le moment du point numérique ($M_1$ $m_1$) par rapport au plan des Y Z; les équations (1) expriment donc que le moment du résultant est égal à la somme des moments des composants.

Deux systèmes de points numériques sont dits équivalents lorsqu'ils ont même résultant en position et en nombre ; d'après cela l'équivalence de deux systèmes est évidemment exprimée par les relations

$$\Sigma m'_1 = \Sigma m_1 \quad \Sigma m'_1 x'_1 = \Sigma m_1 x_1 \quad \Sigma m'_1 y'_1 = \Sigma m_1 y_1 \quad \Sigma m'_1 z'_1 = \Sigma m_1 z_1 \qquad (2)$$

Soit un plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les cosinus des angles de la normale au plan avec les axes : le moment du point $x_1 y_1 z_1$ par rapport à ce plan est le produit de son nombre $m_1$ par sa distance $\delta_1$ à ce plan ; or on a $\delta_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p$ ; on déduit de là :

$$\Sigma m_1 \delta_1 = \alpha \Sigma m_1 x_1 + \beta \Sigma m_1 y_1 + \gamma \Sigma m_1 z_1 - p \Sigma m_1 \qquad (3)$$

Or, d'après les équations (2), $\Sigma m'_1 \delta'_1$, pour le même plan, aurait la même valeur ; donc deux systèmes de points équivalents ont même moment ($\Sigma m_1 \delta_1 = \Sigma m'_1 \delta'_1$) pour un même plan d'ailleurs quelconque. La réciproque est vraie.

**23.** Pour que les formules précédentes aient toute leur généralité, il faut, bien entendu, supposer que les nombres $m$ $m_1$... sont des nombres algébriques. Si deux points numériques coïncident, leur résultant coïncide avec eux et a pour nombre la somme algébrique des nombres des composants.

En particulier, si ces deux composants ont des nombres égaux et de signe contraire le résultant a un nombre nul.

Cela posé, admettons qu'après avoir composé $n-1$ points d'un système de $n$ points le résultant de ces $n-1$ points coïncide avec le $n^{\text{ème}}$ point et ait même nombre que ce dernier, mais de signe contraire, le résultant des $n$ points a alors un nombre nul ; c'est ce que nous appellerons un système de résultant nul. Le point résultant est évidemment indéterminé de position, car nous venons de voir qu'il coïncide avec le $n^{\text{ème}}$ point, lequel est arbitraire parmi les $n$ points du système ; il est même arbitraire d'une façon absolue, car on peut décomposer l'un de ces points en deux autres et associer ainsi au système des $n$ points un point quelconque de l'espace.

Voyons ce que deviennent, dans ce cas particulier, les équations (1) ; on a d'abord $m=0$, c'est-à-dire $\Sigma m_1 = 0$ ; de plus, les formules $x = \dfrac{\Sigma m_1 x_1}{m}$, etc., qui donnent les coordonnées du résultant, doivent se présenter sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$, ce qui exige $\Sigma m_1 x_1 = 0$ ; ainsi un système de résultant nul est défini par les relations :

$$\Sigma m_1 = 0 \qquad \Sigma m_1 x_1 = 0 \qquad \Sigma m_1 y_1 = 0 \qquad \Sigma m_1 z_1 = 0 \qquad (4)$$

Les équations (1) peuvent s'écrire :

$$\Sigma m_1 - m = 0 \qquad \Sigma m_1 x_1 - mx = 0 \qquad \Sigma m_1 y_1 - my = 0$$
$$\Sigma m_1 z_1 - mz = 0$$

et elles expriment qu'en adjoignant au système des points numériques leur résultant changé de signe, c'est-à-dire leur résultant avec le nombre $-m$, on a un système de résultant nul.

Réciproquement, dans un système de résultant nul, tout point numérique changé de signe est le résultant de tous les autres points.

Le moment d'un système de points numériques étant un produit dont l'un des facteurs est le nombre du résultant, ce moment est toujours nul dans un système de résultant nul ; cela résulte d'ailleurs immédiatement de l'équation (3).

**24.** Si dans les équations (1) on suppose que $\Sigma m_1$ soit nul, $\Sigma m_1 x_1$, $\Sigma m_1 y_1$, et $\Sigma m_1 z_1$ étant différents de zéro, les coor-

données $x\ y\ z$ du résultant se présentent sous la forme $\frac{A}{0}$ ce qui exprime que le résultant est rejeté à l'infini.

Dans ce cas nous prendrons pour définition de l'équivalence de deux systèmes les équations (2).

L'équation des moments (3) se réduit pour $\Sigma m_1 = 0$ à :

$$\Sigma m_1 \delta_1 = \alpha \Sigma m_1 x_1 + \beta \Sigma m_1 y_1 + \gamma \Sigma m_1 z_1$$

$\Sigma m_1 \delta_1$ est donc indépendant de $p$ et reste par suite constant lorsque le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ se déplace parallèlement à lui-même. Ainsi le moment d'un pareil système par rapport à divers plans parallèles est constant. La réciproque est vraie, car si $\Sigma m_1 \delta_1$ est indépendant de $p$ on doit avoir dans l'équation (3) $\Sigma m_1 = 0$.

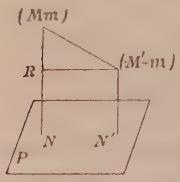
Si le système consiste en deux points seulement, la condition $\Sigma m_1 = 0$ exprime que ces deux points ont des nombres égaux et de signe contraire ; c'est ce que nous appellerons un couple de points. La construction ordinaire du résultant de deux points numériques quelconques appliquée au cas de deux points formant couple donne évidemment un résultant rejeté à l'infini : dans tout autre cas le résultant existe à distance finie.

Cela posé, composons de proche en proche les $n$ points d'un système dans lequel on a $\Sigma m_1 = 0$; lorsqu'on aura composé $n-1$ points, le résultant de ces $n-1$ points formera évidemment un couple avec le $n^{\text{ème}}$ point, autrement il y aurait un résultant à distance finie : cela est encore évident d'une autre manière si l'on remarque que le nombre du résultant N des $n-1$ points a pour nombre la somme des nombres de ces $n-1$ points et qu'en y ajoutant le nombre du $n^{\text{ème}}$ point, on doit avoir 0 d'après la condition $\Sigma m_1 = 0$ ; le point N et ce $n^{\text{ème}}$ point ont donc des nombres égaux et de signe contraire et forment couple. Ainsi tout système dans lequel on a $\Sigma m_1 = 0$ peut se ramener à un système équivalent de deux points formant couple.

Si les deux points formant couple, au lieu d'être distincts de position, coïncidaient, on aurait un système de résultant nul.

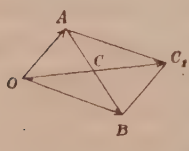
**25.** Nous sommes ainsi amené à étudier les systèmes dans lesquels les points forment couple.

Soit donc un couple de points (M$m$) (M′—$m$); prenons son moment par rapport au plan P ; si N et N′ sont les projections des deux points sur P, les moments des deux points sont $m$MN et — $m$M′N′, la somme de ces moments est donc $m$. MR, MR étant la différence MN — M′N′; si $\varphi$ est l'angle de MM′ avec la normale au plan P, on a MR = MM′ cos $\varphi$. Ainsi le moment du couple est égal à $m$. MM′ cos $\varphi$ = $\mu$ cos $\varphi$, $\mu$ étant le produit $m$. MM′, c'est-à-dire le moment du couple pour un plan normal à MM′, puisqu'on a alors $\varphi$ = 0 ; $\mu$ est ce que nous appellerons d'une façon absolue le moment du couple, MM′ en sera la direction. La formule précédente montre donc que deux couples ont même moment $\mu$ cos $\varphi$ par rapport à un plan quelconque lorsqu'ils ont même moment $\mu$ et même direction ; telles sont les conditions d'équivalence de deux couples.




D'après cela un couple de points n'intervient dans la composition que par son moment et sa direction ; or on peut réunir ces deux éléments du couple en portant à partir d'une origine donnée O un segment de droite dont la direction est celle du couple et dont la longueur OA mesure son moment ; le segment OA représente donc le couple ; si l'on donne aux extrémités O et A les nombres +1 et — 1, ces deux points forment un couple équivalent au précédent, car la direction est la même et le moment du second couple est 1 × OA c'est-à-dire OA.

Cela posé, soit à composer deux couples ; remplaçons-les par leurs segments représentatifs OA et OB: le premier couple équivaut, d'après la remarque précédente, au couple (O 1) (A — 1), et le second au couple (O1) (B — 1) ; nous avons donc à composer ces quatre points ; or les deux points (O 1) et (O 1) se composent en un point (O 2) et les deux points (A — 1) (B — 1) en un point (C — 2), C étant le milieu de AB. Nous avons ainsi le couple résultant (O 2) (C — 2) de moment 2 OC représenté par conséquent par le segment $OC_1$ double de OC ; or ce segment $OC_1$ est évidemment la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB comme côtés. Il résulte de là que la com-

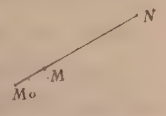


position des couples de points revient à la composition des segments qui les représentent, ces segments étant ramenés à une même origine O.

**26.** Soit un point numérique en mouvement (M$m$) et ayant une position pour chaque position du point T ; nous supposerons également que son nombre $m$ a une valeur pour chaque position de T, de sorte que les coordonnées de M et son nombre $m$ sont à la fois des fonctions des coordonnées de T. Quand le point T décrit un chemin élémentaire $dt$, le point M décrit le chemin $ds$ et la vitesse de M est le segment $\frac{ds}{dt}$ dirigé suivant $ds$ ; ce segment multiplié par $m$, c'est-à-dire $m.\frac{ds}{dt}$ est ce que nous appellerons la puissance du point M. En une position initiale $M_0$ le nombre $m_0$ est une constante qui multiplie les vitesses sur toutes les trajectoires passant par ce point ; l'extrémité des puissances décrit donc une ellipse ou un ellipsoïde homothétique à l'ellipse ou à l'ellipsoïde des vitesses ; c'est l'ellipse ou l'ellipsoïde des puissances ; les puissances principales correspondent aux vitesses principales ; des puissances conjuguées correspondent à des vitesses conjuguées, etc. Il est inutile d'insister sur les propriétés des puissances ; il n'y a qu'à se reporter à ce que nous avons dit sur les vitesses.

On peut enfin réserver à ces puissances comme aux vitesses dont elles dérivent le nom de puissances à u. d. et appeler puissance à d. d. et à t. d. le produit des puissances principales, c'est-à-dire le produit des axes de l'ellipse ou de l'ellipsoïde des puissances.

**27.** Soit un déplacement $M_0M$ du point numérique (M$m$) à partir d'une position initiale ($M_0m_0$) correspondant au déplacement infiniment petit $dt$ de T ; nous appellerons point associé du point $M_0$ pour le déplacement considéré un point numérique (N$n$) situé sur la direction $M_0M$ et tel que le point (M$m$) soit le résultant des points ($M_0m_0$) et (N$ndt$). On a ainsi, $dm$ étant l'accroissement $m - m_0$, $m = m_0 + n\,dt$, ou $n = \frac{dm}{dt}$ et $\frac{MM_0}{n\,dt} = \frac{MN}{m_0}$, ou, en remar-



quant que $\frac{MM_0}{dt}$ est la vitesse et $m_0 \frac{MM_0}{dt}$ la puissance $p$ correspondant au déplacement $M_0M$, $\frac{p}{n} = M_0N$.

Ainsi les deux relations fondamentales :

$$n = \frac{dm}{dt} \quad \text{et} \quad M_0N = \frac{p}{\frac{dm}{dt}} \tag{1}$$

donnent le point associé N en position et en nombre.

Réciproquement lorsqu'on connaît l'associé (N$n$) on a par les formules (1) la variation $dm$ et la puissance $p$ ou la vitesse de $M_0$ suivant la direction $M_0N$.

Soient $x_0y_0z_0$ les coordonnées de $M_0$, $x\ y\ z$ ou $x_0 + dx$, $y_0 + dy$ $z_0 + dz$ celles de M et X Y Z celles de N; le point M de nombre $m$ étant le résultant des points ($M_0\ m_0$) et (N $dm$) on a (22) :

$$m(x_0 + dx) = m_0x_0 + Xdm,$$

ou :

$$m_0dx + x_0dm = Xdm, \tag{2}$$

et de même :

$$m_0dy + y_0dm = Ydm, \qquad m_0dz + z_0dm = Zdm.$$

Ces formules donnent les coordonnées du point N en fonctions de celles de $M_0$ et de M.

**28.** Considérons un déplacement à d. d. de M, on a alors :

$$x = f_1(\alpha\beta), \quad y = f_2(\alpha\beta), \quad \text{et aussi :} \quad m = \varphi(\alpha\beta), \tag{3}$$

et pour des déplacements infiniment petits :

$$dx = p_1d\alpha + q_1d\beta, \quad dy = p_2d\alpha + q_2d\beta, \quad dm = ad\alpha + bd\beta \tag{4}$$

en désignant par $p_1\ q_1$, $p_2\ q_2$, $a$ et $b$ les dérivées partielles des équations précédentes. A chaque trajectoire de M passant par la position initiale $M_0$ correspond un point associé N ; cherchons le lieu des points N pour toutes ces trajectoires.

A cet effet, supposons que le point $M_0$ soit l'origine des coordonnées, les formules (2) deviennent dans le plan en supposant $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,

$$m_0dx = Xdm, \quad \text{ou :} \quad X = m_0\frac{dx}{dm}, \quad Y = m_0\frac{dy}{dm},$$

ou, d'après les relations (4) :

$$X = m_0 \frac{p_1 d\alpha + q_1 d\beta}{a d\alpha + b d\beta}, \qquad Y = m_0 \frac{p_2 d\alpha + q_2 d\beta}{a d\alpha + b d\beta},$$

ou :

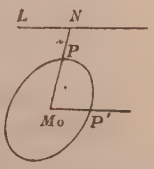
$$(aX - m_0 p_1) d\alpha + (bX - m_0 q_1) d\beta = 0,$$
$$(aY - m_0 p_2) d\alpha + (bY - m_0 q_2) d\beta = 0.$$

D'où, en éliminant $d\alpha$ et $d\beta$ :

$$\begin{vmatrix} aX - m_0 p_1 & bX - m_0 q_1 \\ aY - m_0 p_2 & bY - m_0 q_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

C'est l'équation du lieu cherché : cette équation est en apparence du second degré, mais les termes du second degré sont fournis par le déterminant $\begin{vmatrix} aX & bX \\ aY & bY \end{vmatrix}$, lequel est identiquement nul; on a donc une équation du premier degré, laquelle représente une droite. Ainsi, dans un mouvement infiniment petit à d. d., le lieu des associés du point $M_0$ pour toutes les trajectoires passant par $M_0$ est une droite.

Considérons l'ellipse des puissances en $M_0$ et soit L la droite lieu des points N; $M_0P$ étant la puissance du point M pour un déplacement suivant la direction $M_0N$, on a, d'après les équations (1), $M_0N = \frac{p}{n}$ ou $n = \frac{M_0P}{M_0N}$; ainsi le nombre du point numérique (N$n$) est le rapport $\frac{M_0P}{M_0N}$. $n$ est nul quand $M_0N$ est infini, c'est-à-dire quand N étant rejeté à l'infini, $M_0P$ est parallèle à L; quand le point M se déplace dans cette direction $n = \frac{dm}{dt}$ est nul, ce qui veut dire que $dm$ est du second ordre; donc, dans cette direction, le nombre $m_0$ reste constant. Le point numérique (N$n$) étant rejeté à l'infini (24) doit pouvoir être remplacé par un couple de points; voyons comment on peut déterminer les éléments de ce couple. A cet effet reprenons la construction qui nous donne le point N sur la direction du déplacement $M_0M$; le point ($Mm_0 + dm$) est le résultant (27) des points ($M_0m_0$) et (N $ndt$). Or le système de ces deux



points reste équivalent à lui-même lorsqu'on y joint en $M_1$ deux points numériques de nombre $ndt$ et $-ndt$ : $(Mm_1 + dm)$ est alors le résultant des points $(M_1\ m_1)$ $(M_1\ ndt)$ et du couple $(N\ ndt)$ $(M_0 - ndt)$.

On a donc, en prenant les moments par rapport au plan perpendiculaire en $M_0$ à $M_1M$, $M_1M\ (m_1 + dm) = \mu\, dt$, $\mu$ étant le moment du couple $(Nn)$ $(M_1 - n)$ ; or si on suppose $dm = ndt = 0$,

le point numérique $(M_0\ ndt)$ disparaît et le point $(Mm_0)$ est simplement le résultant de $(M_0\ m_0)$ et du couple $\mu\, dt$ ; c'est donc ce couple $\mu$ qui remplace le point $(N\ n)$ rejeté à l'infini ; la relation $M_0M.m_1 = \mu\, dt$ nous donne d'ailleurs $\mu = m_0 \dfrac{M_0M}{dt} - p$. Ainsi le segment qui représente ce couple est précisément la puissance $p$ ou le rayon $M_0P'$ de l'ellipse des puissances parallèle à L.

**29.** Si deux associés sont rejetés à l'infini, la droite L est elle-même rejetée à l'infini avec tous les associés ; dans ce cas, chaque associé est remplacé par un couple que représente un rayon de l'ellipse des puissances ; le nombre $n = \dfrac{dm}{dt}$ de chaque associé étant nul on a $dm = 0$ pour toutes les trajectoires passant par $M_0$, ce qui revient à dire que pour cette position $M_0$ on a $dm = ad\alpha + bd\beta = 0$ ou $a = 0$ et $b = 0$ ; la fonction $m = \varphi(\alpha,\beta)$ passe alors par un maximum ou un minimum.

Deux associés correspondant à deux déplacements conjugués de M, c'est-à-dire à deux déplacements perpendiculaires de T (8) sont dits conjugués : deux associés conjugués se trouvent évidemment sur deux diamètres conjugués de l'ellipse des puissances et par suite engendrent sur la droite L une involution dont les points doubles sont imaginaires : au rayon de l'ellipse parallèle à L correspond le point de L situé à l'infini, le rayon conjugué donne le point associé conjugué et par suite le centre de l'involution.

Si l'on se donne deux associés conjugués en position et en nombre, l'ellipse des puissances est déterminée ; la relation (1) donne en effet $p = n\,M_0N$ ; on a ainsi la puissance $p$, c'est-à-dire un rayon de l'ellipse des puissances ; l'associé conjugué donne le rayon conjugué de cette même ellipse, ce qui la détermine complètement.

**30.** Dans un déplacement à t. d. il y a un associé sur chaque direction de l'espace passant par la position initiale $M_0$; le lieu de cet associé est donc une surface dont nous allons chercher l'équation. Les coordonnées et le nombre du point numérique M étant des fonctions de $\alpha\beta\gamma$, leurs variations infiniment petites sont données par les équations différentielles :

$$\begin{aligned} dx &= p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \quad dy = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma, \\ dz &= p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma, \quad dm = a d\alpha + b d\beta + c d\gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Prenons pour origine des coordonnées la position initiale $M_0$, les équations (2) donnent alors pour les coordonnées X Y Z du point associé les expressions :

$$X = m_0 \frac{dx}{dm} = m_0 \frac{p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma}{a d\alpha + b d\beta + c d\gamma},$$

$$Y = m_0 \frac{p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma}{a d\alpha + b d\beta + c d\gamma}, \quad Z = m_0 \frac{p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma}{a d\alpha + b d\beta + c d\gamma},$$

et l'on voit aisément que l'élimination de $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ s'obtient par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a\,X - m_0 p_1 & b\,X - m_0 q_1 & c\,X - m_0 r_1 \\ a\,Y - m_0 p_2 & b\,Y - m_0 q_2 & c\,Y - m_0 r_2 \\ a\,Z - m_0 p_3 & b\,Z - m_0 q_3 & c\,Z - m_0 r_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

C'est l'équation du lieu cherché : les termes du troisième degré, dans cette équation, sont fournis par le déterminant $\begin{vmatrix} a\,X & b\,X & c\,X \\ a\,Y & b\,Y & c\,Y \\ a\,Z & b\,Z & c\,Z \end{vmatrix}$ qui est identiquement nul; les termes du second degré sont fournis par des déterminants de la forme $\begin{vmatrix} a\,X & b\,X & m_0 r_1 \\ a\,Y & b\,Y & m_0 r_2 \\ a\,Z & b\,Z & m_0 r_3 \end{vmatrix}$ qui sont également nuls; donc finalement l'équation (7) est du premier degré et représente un plan. Ainsi le lieu des associés pour toutes les trajectoires de M passant par $M_0$ est un plan P.

Pour un déplacement parallèle au plan P l'associé est rejeté à l'infini et remplacé par un couple que représente la puissance du point M dans ce déplacement (28); cette puissance est un rayon de

l'ellipse obtenue en coupant l'ellipsoïde des puissances par un plan diamétral parallèle au plan P. Si pour trois directions non situées dans un même plan les associés sont rejetés à l'infini, le plan P lui-même et tous les associés sont rejetés à l'infini; ils sont alors remplacés par des couples que représentent les rayons de l'ellipsoïde des puissances (29). Dans ce cas $dm$ est nul dans toutes les directions, ce qui veut dire que la fonction $m = \varphi(\alpha\beta\gamma)$ passe par un maximum ou un minimum ; on a alors $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ ; comme on devait s'y attendre ces valeurs de $a$, $b$ et $c$ réduisent l'équation (7) à la forme $k = 0$ ce qui représente bien un plan rejeté à l'infini.

**31.** Trois points associés N, N′ et N″ sont dits conjugués quand ils correspondent à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde des puissances, c'est-à-dire à trois déplacements orthogonaux du point T : trois associés de ce genre s'obtiennent donc par la rencontre de trois diamètres conjugués de cet ellipsoïde avec le plan P. Mais les diamètres conjugués sont les mêmes dans cet ellipsoïde et dans son cône asymptotique : or dans ce cône le trièdre de ces trois diamètres $M_0$ NN′ N″ est tel que chaque arête est la polaire de la face opposée. Le plan P coupe donc le cône suivant une conique et le trièdre suivant un triangle NN′N″ qui est réciproque par rapport à cette conique, c'est-à-dire que chaque sommet N du triangle a pour polaire le côté opposé N′N″. Cette conique est d'ailleurs imaginaire comme le cône asymptotique de l'ellipsoïde. Donc trois associés conjugués sont, dans le plan P, les sommets d'un triangle réciproque par rapport à une même ellipse imaginaire.

Prenons dans l'ellipsoïde des puissances trois diamètres conjugués dont deux soient parallèles au plan P, le troisième $M_0O$ est le lieu des centres des sections faites parallèlement au plan P dans l'ellipsoïde ou dans son cône asymptotique; si donc O est le point où ce diamètre rencontre le plan P, O est le centre de l'ellipse imaginaire dont nous venons de parler.

Cette ellipse rapportée à ses axes a une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1.$$

Supposons $a > b$; cette ellipse a deux foyers réels F et F′ si-

tués sur l'axe OY à une distance $c$ de O donnée par la formule $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. On sait que tout triangle réciproque ayant un sommet en F ou F′ est rectangle en ce point. Cette propriété s'étend donc au triangle formé par trois associés conjugués.

Si le triangle a un sommet au centre O de l'ellipse, le côté opposé est rejeté à l'infini et les deux autres côtés sont deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Si l'on se donne en position et en nombre trois associés conjugués, on en déduit immédiatement les trois diamètres conjugués correspondants de l'ellipsoïde des puissances, ce qui détermine cet ellipsoïde (29).

Si l'ellipsoïde se réduit à un plan, toutes les puissances et par suite les associés situés sur les directions de ces puissances appartiennent à ce plan, lequel est par conséquent le plan P. La réciproque est vraie ; ainsi pour que le plan P passe par $M_0$ il faut et il suffit que l'ellipsoïde des puissances en $M_0$ se réduise à un plan ; dans ce cas nous savons que la vitesse à t. d. en $M_0$ est nulle ; cette conséquence est d'ailleurs évidente lorsqu'on se reporte à l'équation (6) du plan P ; le terme indépendant, dans cette équation, est en effet :

$$-\begin{vmatrix} m_0 p_1 & m_0 q_1 & m_0 r_1 \\ m_0 p_2 & m_0 q_2 & m_0 r_2 \\ m_0 p_3 & m_0 q_3 & m_0 r_3 \end{vmatrix} = -m_0^3 V,$$

V étant la vitesse à t. d. (5).

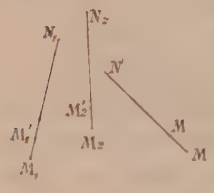
Pour $V = 0$ ce terme s'annule et le plan P passe par $M_0$.

De même dans un déplacement à d. d. la droite L lieu des associés du point $M_0$ passe par $M_0$ quand la vitesse à d. d. de $M_0$ est nulle, c'est-à-dire quand l'ellipse des vitesses en $M_0$ se réduit à une droite.

**32.** Considérons un système de points numériques mobiles $(M_1 m_1)$, $(M_2 m_2)$,... et leur résultant $(Mm)$ mobile en même temps qu'eux. Il est bien entendu que, d'après la définition même de la cinématique, tous ces points se déplacent en fonction du même point T (2) de sorte que les déplacements infiniment petits de tous ces points sont respectivement homographiques au déplacement de T et par suite homographiques entre eux (6) ; ainsi,

pour des positions des mobiles correspondant à une même position de T, les ellipses ou les ellipsoïdes des vitesses ou des puissances sont homographiques.

Donnons à T un déplacement à u. d. infiniment petit *dt;* les points du système deviennent, après ce déplacement, $(M_1'm_1')$ $(M_2'm_2')$... et leur résultant $(M'm')$. Cela posé, prenons les associés $(N_1n_1)$ $(N_2n_2)$... des points du système, et soit $(Nn)$ le résultant de ces associés. D'après la définition des points associés (27) le point $(M_1'm_1')$ est le résultant des points $(M_1m_1)$ et $(N_1n_1dt)$; donc le résultant $(M'm')$ des points $(M_1'm_1')$ s'obtiendra en composant le résultant des points $(M_1m_1)$ avec le résultant des points $(N_1n_1dt)$; or ces deux résultants sont les points $(Mm)$ et $(N\,ndt)$; ainsi finalement $(M'm')$ est le résultant de $(Mm)$ et de $(N\,ndt)$; donc $(Nn)$ est l'associé de $(Mm)$ et l'on a ce théorème :




Dans un système de points numériques en mouvement l'associé du résultant du système est le résultant des associés de tous les points.

Ce théorème donne évidemment les puissances, dans toutes les directions, du résultant et par conséquent l'ellipse ou l'ellipsoïde des vitesses de ce point.

Il est clair que si l'associé de l'un des points numériques est rejeté à l'infini il faut, dans la composition, le remplacer par un couple représenté par la puissance du point en question. Si tous les associés étaient rejetés à l'infini on n'aurait à composer que des couples, c'est-à-dire les puissances qui les représentent (25), ces puissances étant transportées en un même point; la résultante de translation de ces puissances serait alors la puissance du résultant du système. Nous avons dit que, lorsque l'associé est rejeté à l'infini, le mouvement du mobile s'effectue dans la direction pour laquelle le nombre du mobile reste constant (28). Le cas dont nous venons de parler est donc celui où les points numériques ont leurs nombres constants et comme la puissance $mv$ est, en cinématique ordinaire, la quantité de mouvement, on voit que l'on retrouve ainsi le théorème relatif à la quantité de mouvement du centre de gravité d'un système de points matériels.

**33.** Si dans un déplacement à d. d. de tous les points du système on considère les deux systèmes de points N associés correspondant à deux déplacements perpendiculaires de T, ces deux systèmes de points N sont dits conjugués.

Les deux résultants de deux systèmes conjugués sont deux associés conjugués du résultant M des points mobiles ; ces deux résultants sont donc en involution (29) sur la droite, lieu des associés de M.

Lorsque deux systèmes d'associés correspondant à deux déplacements de T donnent lieu, non à un point résultant, mais à un couple résultant, on a pour M deux associés rejetés à l'infini et par suite tous les associés de M sont rejetés à l'infini (29). Ainsi quand deux systèmes d'associés donnent lieu chacun à un couple il en est de même d'un autre système quelconque d'associés, et ces couples sont représentés par les rayons de l'ellipse des puissances du point M (29). Dans ce cas le nombre du résultant M est constant dans toutes les directions.

Si l'on considère un déplacement à t. d. il faudra prendre trois systèmes d'associés et l'on aura le même théorème, pourvu toutefois que ces trois systèmes donnent lieu à trois puissances non situées dans un même plan.

Si dans un mouvement à d. d. deux systèmes d'associés ont des résultants situés en ligne droite avec le résultant M, les résultants de tous les autres systèmes d'associés seront situés sur la même droite et dans ce cas l'ellipse des vitesses du point M se réduit à cette droite (31).

On a un théorème tout à fait analogue dans un mouvement à t. d., lorsque l'ellipsoïde des vitesses du point M se réduit à un plan.

## V

## Mouvement d'une droite dans un plan.

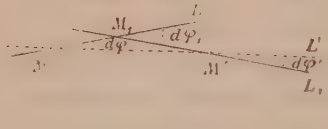
**34.** Le déplacement d'une droite dans un plan est la question corrélative de celle du mouvement d'un point dans un plan.

L'équation d'une droite $y = a\,x + b$ contenant deux paramè-

tres, la droite est susceptible dans son plan d'un déplacement à d. d. en fonction du point T $(\alpha\beta)$, c'est-à-dire que si $a$ et $b$ sont des fonctions de $\alpha$ et $\beta$, la droite a dans son plan une position correspondant à chaque position de T.

Si le point T décrit une courbe, il y a une relation entre $\alpha$ et $\beta$ et le déplacement de la droite ne dépendant plus que d'une variable le mouvement est à u. d. Dans ce cas l'équation de la droite ne contient plus qu'une variable; on sait qu'alors elle enveloppe une courbe que nous appellerons sa trajectoire; la vitesse angulaire ou simplement la vitesse de la droite est un point numérique situé au point de contact de la droite avec son enveloppe et dont le nombre est $\frac{d\varphi}{dt}$, $d\varphi$ étant l'angle infiniment petit dont tourne la droite quand le point T décrit l'arc $dt$; $d\varphi$ est aussi la courbure d'un arc infiniment petit de la trajectoire qu'enveloppe la droite.

Considérons deux déplacements simultanés à u. d. de la droite L, c'est-à-dire supposons que L se déplace par rapport aux axes des coordonnées en fonction de T et qu'en même temps ces axes se déplacent eux-mêmes en fonction de T : cherchons quel est le déplacement total de L; dans le déplacement par rapport aux axes L vient en L′ et sa vitesse est le point numérique $\left(M\frac{d\varphi}{dt}\right)$. Si maintenant nous donnons à la droite le déplacement dû au mouvement des axes, L′ vient en $L_1$ avec une vitesse représentée par le point numérique $\left(M'\frac{d\varphi'}{dt}\right)$. Le mouvement total amène donc L en $L_1$ avec une vitesse $\left(M_1\frac{d\varphi_1}{dt}\right)$.




Or le triangle $MM'M_1$ donne :

$$d\varphi_1 = d\varphi + d\varphi' \qquad \text{et} \qquad \frac{M_1M}{\sin d\varphi'} = \frac{M_1M'}{\sin d\varphi} = \frac{MM'}{\sin d\varphi_1}.$$

Les angles étant infiniment petits, on peut remplacer les sinus par les angles eux-mêmes, il vient alors en posant $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{d\varphi'}{dt} = \omega'$, $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ :

$$\omega_1 = \omega + \omega' \qquad \text{et} \qquad \frac{M_1M}{M_1M'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Ces relations expriment que le point $(M_1\omega_1)$ est le résultant des points $(M\omega)$ et $(M'\omega')$ (22). Cela s'étend évidemment de proche en proche à autant de mouvements simultanés qu'on veut. Donc, dans ces mouvements, la vitesse totale, c'est-à-dire la vitesse dans le mouvement total est la résultante des vitesses partielles; il ne faut pas perdre de vue qu'ici les vitesses sont des points numériques; ce sont donc ces points que l'on compose; la vitesse totale est en grandeur la somme algébrique des vitesses partielles.

On remarquera l'analogie de ce théorème avec celui qui est relatif à la composition des vitesses d'un point.

Ce rapprochement est immédiat grâce aux dénominations nouvelles que nous avons adoptées relativement à la composition des points numériques.

La composition des vitesses partielles de la droite L nous donne comme point résultant le point où la droite touche son enveloppe dans le mouvement total.

**35.** Supposons la droite L donnée par son équation $y = ax + b$, $a$ et $b$ étant des fonctions de $t$ arc décrit par le point T : le point où L touche son enveloppe s'obtient comme on sait en combinant l'équation de la droite avec sa dérivée prise par rapport à $t$, $\frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt} = 0$. Le point de contact déterminé par ces deux équations a ainsi pour coordonnées :

$$x = -\frac{\frac{db}{dt}}{\frac{da}{dt}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b\frac{da}{dt} - a\frac{db}{dt}}{\frac{da}{dt}}. \qquad (1)$$

Si $\varphi$ est l'angle de la droite avec l'axe des $x$, on a $\operatorname{tg}\varphi = a$, et la vitesse de la droite est en grandeur $\frac{d\varphi}{dt}$; mais on a $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d.\,\text{arc. tg}\,a}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{1}{1+a^2}$. Ainsi la vitesse $\omega$ est donnée par la formule :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{da}{dt}\frac{1}{1+a^2} \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) donnent la vitesse en position et en nombre ; on remarquera que si la position primitive de la droite est l'axe des $x$ on a $a = 0$ et $b = 0$; dans ce cas les formules (1) et (2) se réduisent à :

$$x = -\frac{\frac{db}{dt}}{\frac{da}{dt}}, \qquad y = 0, \qquad \omega = \frac{da}{dt}. \tag{3}$$

**36.** Le déplacement à d. d. d'une droite $y = ax + b$ en fonction du point T est défini par les deux équations

$$a = f_1(\alpha\beta), \qquad b = f_2(\alpha\beta), \tag{4}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant comme toujours les coordonnées du point T.

Un déplacement infiniment petit de la droite est défini simplement par les équations différentielles :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta, \qquad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta \tag{5}$$

dans lesquelles $p_1$ $q_1$, $p_2$ $q_2$ sont les dérivées partielles de $f_1$ et $f_2$.

Quand le point T décrit un chemin infiniment petit $dt$, les équations (5) nous donnent $da$ et $db$ en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$; l'équation de la droite devient $y = (a + da)\, x + b + db$; les équations (1) et (2) donnent pour ce déplacement à u. d. de la droite sa vitesse en position et en nombre.

Si l'on suppose que la position initiale de la droite est l'axe des $x$ et que la position initiale correspondante de T est l'origine des coordonnées, on a pour cette position initiale $a = 0$, $b = 0$ et l'équation de la droite après son déplacement est $y = da.\, x + db$; or $da$ et $db$ étant des fonctions linéaires de $d\alpha$ et $d\beta$, d'après les équations (5), il en résulte que la droite est corrélative de la position correspondante de T, d'où cette propriété fondamentale : les déplacements infiniment petits correspondants de la droite et du point T sont des figures corrélatives.

On sait que la corrélation transforme un point en une droite, des droites concourantes en des points situés sur une même droite et conserve le rapport anharmonique.

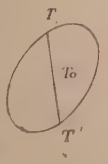
**37.** Mettons sous forme finie les formules de cette corrélation en

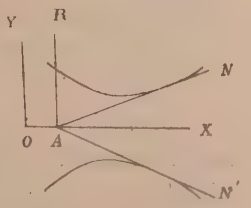
faisant correspondre la droite $y = ax + b$ au point T par les équations :

$$a = p_1\alpha + q_1\beta, \qquad b = p_2\alpha + q_2\beta.$$

Au point $\alpha = 0$, $\beta = 0$ correspond la droite $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des $x$; au point de l'infini situé dans la direction $\beta = k\alpha$ correspond la droite $y = \alpha[p_1x + p_2 + k(q_1x + q_2)]$ ou $\frac{y}{\alpha} = p_1x + p_2 + k(q_1x + q_2)$, d'où, pour $\alpha = \infty$, $x = -\frac{p_2 + kq_2}{p_1 + kq_1}$, c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des $y$. Ainsi aux points de l'infini correspondent des droites parallèles à l'axe des $y$.

On sait que si le point T décrit une conique, la droite correspondante enveloppe une conique : supposons que T décrive une conique C ayant son centre à l'origine $\alpha = 0$, $\beta = 0$; traçons le diamètre $TT_0T'$; au point $T_0$ correspond comme nous l'avons vu l'axe des $x$, aux deux points T et T' les deux tangentes AN et AN' à la conique corrélative C', enfin au point situé à l'infini sur TT' correspond une droite AR parallèle à l'axe des $y$, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe des $x$; mais les quatre points $TT_0T'\infty$ forment une proportion harmonique puisque $T_0$ est le milieu de TT', donc les quatre droites correspondantes AN, AX, AN' et AR forment un faisceau harmonique et les deux droites perpendiculaires AX et AR sont les bissectrices des deux autres. Ainsi $T_0$ étant le milieu de TT', OX est la bissectrice de NAN'; il en résulte évidemment que la conique C' est symétrique par rapport à OX; ainsi OX est un des axes de C'; les points où cet axe rencontre C' correspondent aux tangentes menées de $T_0$ à la conique C; si C est une ellipse, ces tangentes sont imaginaires et par suite aussi les deux points en question; dans ce cas la conique C' est évidemment une hyperbole dont OX est l'axe transverse.




Les diamètres conjugués de C forment comme on sait un faisceau en involution; à ce faisceau de droites passant par $T_0$ cor-

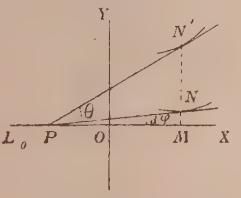
respond une série de points en involution sur OX et cette involution a ses points doubles réels ou imaginaires en même temps que le faisceau lui-même a ses deux droites doubles réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que la conique C est une hyperbole ou une ellipse. Les asymptotes de C étant les tangentes menées du point $T_0$ correspondent évidemment aux deux points de la conique C′ situés sur l'axe OX; ces deux points qui sont des sommets de C′ sont donc les points doubles de l'involution dont nous venons de parler; le centre de l'involution est le milieu de la droite qui joint ces deux points, c'est-à-dire le centre même de la conique C′.

**38.** Appliquons ce qui précède au déplacement infiniment petit d'une droite L en fonction du point T et soit $L_0$ la position initiale correspondant à $T_0$ : quand T décrit l'élément de trajectoire $T_0T = dt$, L passe de la position $L_0$ à la position L et si $d\varphi$ est l'angle de L avec $L_0$, la vitesse de L pour ce déplacement est le point numérique $\left(A\,\frac{d\varphi}{dt}\right)$ (34).

A chaque trajectoire passant par $T_0$ correspond ainsi une vitesse de L représentée par un point numérique situé sur L. Cela posé, entourons le point $T_0$ d'un cercle de rayon $dt$, à ce cercle correspond par corrélation une hyperbole dont l'axe transverse est $L_0$ (37); quand le point T arrive sur ce cercle, la droite L devient tangente à cette hyperbole; soit $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, l'équation de cette hyperbole rapportée à ses axes dont l'un est, comme nous l'avons dit, la droite $L_0$; toute droite L tangente à l'hyperbole fait avec $L_0$ un angle infiniment petit, puisque nous supposons les déplacements infiniment petits; cela est vrai en particulier pour les asymptotes $\frac{y}{b} = \pm\frac{x}{a}$; si donc $a$ est fini, $b$ est infiniment petit et par suite aussi $y$ dans l'équation de l'hyperbole pour toute valeur finie de $x$.

Cela posé, soit N le point de contact de la droite L avec l'hyperbole, traçons la perpendiculaire NM à OX et désignons par $d\varphi$ l'angle LPX, la vitesse de la droite est le point numérique $\left(P\,\frac{d\varphi}{dt}\right)$

(34); prenons $MN' = \frac{MN}{dt}$, le point N' engendre, comme on sait, une seconde hyperbole ayant mêmes axes que la précédente et telle que les tangentes en N et N' aux deux hyperboles se rencontrent en P sur l'axe OX. Mais on a :




$$d\varphi = \frac{MN}{PM} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{MN'}{PM} = \operatorname{tg}\theta,$$

$\theta$ étant l'angle N'PM.

D'après la relation qui existe entre MN et MN' l'équation de la seconde hyperbole est $\frac{y^2}{b'^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $b'$ étant la quantité finie $\frac{b}{dt}$. C'est ce que nous appellerons l'hyperbole des vitesses de la droite L; toute tangente PN' à cette hyperbole donne en effet la vitesse de la droite quand elle tourne autour du point P puisqu'on a $\frac{d\varphi}{dt} = tq\,\theta$.

A deux déplacements rectangulaires de T correspondent sur $L_0$ deux vitesses dites conjuguées représentées par des points en involution (37); les points doubles de l'involution sont les sommets imaginaires des deux hyperboles précédentes, ces sommets sont en effet communs aux deux hyperboles. Le centre de l'involution est le centre O des hyperboles; on sait que cette involution peut être engendrée par les deux côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet situé sur l'axe OY.

**39.** Cherchons maintenant, par les formules précédentes, à déterminer directement et sans passer par l'hyperbole des vitesses la vitesse de L pour un déplacement à u. d. de T.

Prenons toujours l'axe OX pour la position initiale de L, la vitesse est donnée en position et en grandeur par les formules (3).

$$x = -\frac{\frac{db}{dt}}{\frac{da}{dt}}, \qquad y = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{da}{dt}.$$

Un déplacement à u. d. de T est défini par la relation $\frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg}\lambda$

et, $dt$ étant ce déplacement, on a $\frac{d\alpha}{dt} = \cos\lambda$ et $\frac{d\beta}{dt} = \sin\lambda$. Rappelons enfin qu'on a :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta \qquad \text{et} \qquad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta.$$

Il vient alors :

$$x = -\frac{\frac{db}{dt}}{\frac{da}{dt}} = -\frac{p_2\cos\lambda + q_2\sin\lambda}{p_1\cos\lambda + q_1\sin\lambda} = -\frac{p_2 + q_2\operatorname{tg}\lambda}{p_1 + q_1\operatorname{tg}\lambda}$$

et

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{da}{dt} = p_1\cos\lambda + q_1\sin\lambda.$$

Ces deux formules nous donnent ainsi en position et en grandeur la vitesse de la droite quant T se déplace dans la direction $\lambda$. L'expression de $x$ en fonction de $\lambda$ nous donne encore la corrélation qui existe entre la position du point qui représente la vitesse et la direction $\lambda$.

L'angle $\lambda$ s'exprime en fonction de $x$ par la relation :

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{p_1 x + p_2}{q_1 x + q_2}.$$

Nous savons qu'à deux directions perpendiculaires $\lambda$ et $\lambda'$ correspondent deux points $x$ et $x'$ en involution ; cherchons l'équation de cette involution ; on a :

$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{p_1 x' + p_2}{q_1 x' + q_2}$$

et par suite :

$$\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\lambda' = -1 = \frac{p_1 x + p_2}{q_1 x + q_2}\cdot\frac{p_1 x' + p_2}{q_1 x' + q_2},$$

d'où :

$$(p_1^2 + q_1^2)\,xx' + (p_1 p_2 + q_1 q_2)(x + x') + p_2^2 + q_2^2 = 0.$$

On vérifie aisément sur cette équation que les points doubles sont imaginaires.

Si $\omega$ et $\omega'$ sont en grandeur les deux vitesses conjuguées, on a :

$$\omega = p_1\cos\lambda + q_1\sin\lambda$$

et

$$\omega' = p_1\cos\lambda' + q_1\sin\lambda' = p_1\sin\lambda - q_1\cos\lambda,$$

d'où l'on déduit :

$$\omega^2 + \omega'^2 = p_1^2 + q_1^2.$$

Cherchons enfin, pour terminer, l'équation de l'hyperbole des vitesses ; cette hyperbole est l'enveloppe d'une droite qui passe par le point $x = -\dfrac{p_2 \cos\lambda + q_2 \sin\lambda}{p_1 \cos\lambda + q_1 \sin\lambda}$, $y = 0$ et qui a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{d\varphi}{dt} = p_1 \cos\lambda + q_1 \sin\lambda$ (38). L'équation de cette droite est donc :

$$Y = (p_1 \cos\lambda + q_1 \sin\lambda)\left[X + \frac{p_2 \cos\lambda + q_2 \sin\lambda}{p_1 \cos\lambda + q_1 \sin\lambda}\right],$$

c'est-à-dire :

$$Y = (p_1 X + p_2)\cos\lambda + (q_1 X + q_2)\sin\lambda.$$

On aura l'enveloppe cherchée en éliminant $\lambda$ entre cette équation et sa dérivée en $\lambda$ qui est :

$$0 = -(p_1 X + p_2)\sin\lambda + (q_1 X + q_2)\cos\lambda.$$

Cette élimination se fait en ajoutant membre à membre ces deux équations élevées au carré; on a ainsi :

$$Y^2 = (p_1 X + p_2)^2 + (q_1 X + q_2)^2.$$

C'est l'équation de l'hyperbole ; cette équation permet de retrouver les propriétés déjà connues de cette hyperbole.

## VI

## Mouvement d'un plan dans l'espace.

**40.** L'équation d'un plan P $z = ax + by + c$ contient trois paramètres qu'on peut faire dépendre par trois relations des coordonnées $\alpha\beta\gamma$ du point T; de cette façon P a une position correspondant à chaque position de T.

Le mouvement d'un plan peut donc être à t. d. ; s'il y a entre $\alpha\beta\gamma$

une relation le point T décrit une surface et le mouvement du plan ne dépendant plus que de deux variables est un mouvement à d. d.

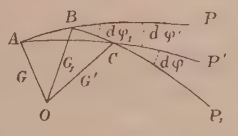
Enfin s'il y a deux relations entre $\alpha\beta\gamma$ le point T décrit une courbe et le mouvement de P est à u. d.

On sait que, dans ce mouvement, le plan P dépendant d'une seule variable enveloppe une surface développable S à laquelle il est tangent tout le long d'une génératrice G qu'on appelle la caractéristique du plan. Cette génératrice elle-même est tangente à une courbe qui est l'arête de rebroussement de la surface S et le plan P est osculateur à cette courbe.

Le déplacement élémentaire de P quand T décrit sur sa trajectoire l'élément $dt$ est une rotation d'angle $d\varphi$ autour de sa caractéristique G; nous appellerons vitesse angulaire ou simplement vitesse du plan P la droite numérique $\left(G\,\frac{d\varphi}{dt}\right)$ ou, ce qui revient au même, un segment de longueur $\frac{d\varphi}{dt}$ porté sur la droite G. Si le plan P reste parallèle à une droite OZ il enveloppe un cylindre et son mouvement revient à celui de la droite L intersection de P avec le plan XOY perpendiculaire à OZ; la vitesse du plan a même grandeur $\frac{d\varphi}{dt}$ que la vitesse de L et le point où G rencontre L est en position la vitesse de la droite. Nous rentrons ainsi dans un cas déjà examiné (34).

**41.** Supposons que le plan P ait un déplacement à u. d. par rapport aux axes des coordonnées et qu'en même temps les axes aient eux-mêmes un déplacement à u. d.; ces deux déplacements correspondant au même déplacement $dt$ de T. Soit $(G\,\omega)$ la vitesse de P dans le premier mouvement; soit également $(G'\omega')$ la vitesse de P dans le second mouvement, c'est-à-dire dans le mouvement qu'aurait le plan P supposé immobile par rapport aux axes se déplaçant. Ces deux vitesses se rencontrent en O et ce point reste évidemment immobile dans le déplacement total. La vitesse totale $(G_1\,\omega_1)$ est donc une droite passant par O; coupons la figure par une sphère de centre O et de rayon unité. Sur cette sphère, le plan P est représenté par le grand cercle que nous désignerons par la même lettre P.

Dans le premier mouvement P vient en P′ et dans le second mouvement de P′ en $P_1$ : le triangle sphérique ABC donne, les angles $d\varphi$ $d\varphi'$ et $d\varphi_1$ étant infiniment petits :



$$\frac{\sin AB}{d\varphi} = \frac{\sin BC}{d\varphi'} = \frac{\sin AC}{d\varphi_1},$$

d'où en divisant les angles par $dt$ :

$$\frac{\sin AB}{\omega'} = \frac{\sin BC}{\omega} = \frac{\sin AC}{\omega_1}.$$

On a donc en repassant de la figure sphérique à la figure dans l'espace :

$$\frac{\sin \widehat{GG_1}}{\omega'} = \frac{\sin \widehat{G'G_1}}{\omega} = \frac{\sin \widehat{GG'}}{\omega_1}.$$

Or ces relations expriment que $(G_1\,\omega_1)$ est le troisième côté du triangle dont les deux premiers côtés sont $(G\omega)$ et $(G_1\omega_1)$.

Ainsi $(G_1\omega_1)$ est la résultante de $(G\omega)$ et $(G'\omega')$ : ce résultat s'étend évidemment de proche en proche à autant de mouvements simultanés qu'on veut : donc la vitesse totale est la résultante des vitesses partielles.

**42.** Soit $z = ax + by + c$ l'équation du plan P ; déterminons analytiquement sa vitesse pour le déplacement $dt$ de T.

La génératrice G suivant laquelle le plan P touche sa surface enveloppe est déterminée comme on sait par les deux équations :

$$z = ax + by + c \quad \text{et} \quad 0 = \frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt}. \qquad (1)$$

L'angle $d\varphi$ dont tourne le plan P est donné par la formule connue $d\varphi = \frac{\sqrt{da^2 + db^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$ ; on a donc :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2} \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent la vitesse en position et en grandeur.

Dans le cas où la position primitive du plan P est le plan des $xy$, on a $a = b = c = 0$ et les équations (1) et (2) se réduisent à :

$$z = 0, \quad \frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt} = 0, \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2} \qquad (3)$$

**43.** Le déplacement à t. d. du plan P en fonction de T est défini par les trois relations

$$a = f_1(\alpha\beta\gamma), \qquad b = f_2(\alpha\beta\gamma), \qquad c = f_3(\alpha\beta\gamma),$$

et le déplacement infiniment petit par les relations :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \quad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma, \quad dc = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma. \qquad (4)$$

Prenons la position initiale du point T pour origine des coordonnées $\alpha\beta\gamma$ et la position initiale de P pour plan des $xy$. Les équations (4) du premier degré en $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ expriment alors que le plan P dont l'équation est $z = da.x + db.y + dc$ est corrélatif du point T dont les coordonnées sont $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. Donc, le déplacement de P est corrélatif du déplacement infiniment petit correspondant de T.

La corrélation dans l'espace fait, comme on sait, correspondre un plan à un point, une droite à une droite et conserve le rapport anharmonique.

Mettons les équations (4) sous forme finie, elles deviennent :

$$a = p_1\alpha + q_1\beta + r_1\gamma, \qquad b = p_2\alpha + q_2\beta + r_2\gamma, \qquad c = p_3\alpha + q_3\beta + r_3\gamma \qquad (5)$$

et le plan $z = ax + by + c$ est corrélatif du point $\alpha\beta\gamma$. Supposons que le point $\alpha\beta\gamma$ s'éloigne à l'infini dans la direction $\lambda\mu\nu$, on a :

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu} = \rho ;$$

l'équation du plan P devient alors :

$$\frac{z}{\rho} = (p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu)x + (p_2\lambda + q_2\mu + r_2\nu)y + (p_3\lambda + q_3\mu + r_3\nu).$$

Pour $\rho = \infty$ cette équation prend la forme $a'x + b'y + c' = 0$.

Donc à un point T situé à l'infini correspond un plan P perpendiculaire au plan des $xy$, c'est-à-dire à la position initiale du plan P.

**44.** Si l'on considère quatre points $TT_0T'$ et $\infty$ situés sur une même droite passant par l'origine $T_0$, à ces quatre points correspondent les quatre plans $PP_0P'$ et $P_1$ parmi lesquels le plan $P_0$ est le plan des $xy$ et qui passent tous par une même droite; le plan $P_1$ correspondant à un point situé à l'infini est perpendiculaire au plan $P_0$. Cela posé, si le point $T_0$ est le milieu de $TT'$ les quatre points $TT_0T'\infty$ sont en proportion harmonique et par suite aussi les plans correspondants; on en déduit très aisément que les plans $P_0$ et $P_1$ perpendiculaires entre eux sont les plans bissecteurs des deux autres. Donc à deux points T et T′ symétriques par rapport au point $T_0$ correspondent deux plans P et P′ symétriques par rapport au plan $P_0$.

Il suit de là que si le point T décrit une surface du second degré S de centre $T_0$ le plan P enveloppe une surface du second degré $S_1$, symétrique par rapport au plan $P_0$, c'est-à-dire que le plan des $xy$ est un plan principal.

Au cône asymptote C de S, cône dont le sommet est $T_0$ correspond une conique $C_1$ située dans le plan $P_0$ et sur la surface $S_1$; $C_1$ est donc une section principale de $S_1$; elle est réelle ou imaginaire en même temps que le cône asymptote C; ainsi, si S est un ellipsoïde, $S_1$ est un hyperboloïde à deux nappes situées de part et d'autre du plan des $xy$.

Prenons dans le cône asymptote C ou, ce qui revient au même, dans la surface S, un trièdre formé par trois diamètres conjugués; à ce trièdre correspond, comme figure corrélative, un triangle situé dans le plan des $xy$ et ce triangle est réciproque par rapport à la conique $C_1$, c'est-à-dire que chaque sommet est le pôle du côté opposé.

A un plan passant par $T_0$ correspond un point $M_0$ situé dans le plan des $xy$; à des droites situées dans ce plan et passant par $T_0$ correspondent des droites situées dans le plan des $xy$ et passant par $M_0$.

Telles sont quelques-unes des propriétés principales de cette corrélation, lesquelles seront appliquées dans ce qui suit.

**45.** Lorsque le point T décrit une surface, le plan P a un mouvement à d. d. ; on sait que dans ce cas il reste tangent à une surface S à laquelle il n'est tangent qu'en un point M; ce point de contact s'obtient en associant à l'équation du plan P les deux dérivées partielles de cette équation par rapport à chacune des deux variables; ces trois équations déterminent les coordonnées du point M. Si le point T décrit non plus la surface en question, mais une ligne située sur cette surface, le plan P a un mouvement à u. d.; il reste toujours tangent à la surface S, mais il enveloppe en même temps une surface développable laquelle est circonscrite à la surface S; la caractéristique du plan passe donc toujours par le point où le plan P touche la surface S.

Prenons une position initiale $T_0$ de T à laquelle correspond la position initiale $P_0$ du plan P, $P_0$ étant tangent en O à la surface S Rapportons le point T à des axes de coordonnées dont l'origine soit en $T_0$ et tels que le plan des $\alpha\beta$ soit le plan tangent à la surface décrite par T, de sorte que pour des déplacements infiniment petits sur cette surface on puisse regarder $d\gamma$ comme négligeable.

Rapportons de même le plan P à des axes dont l'origine soit en O, le plan $P_0$ étant le plan des XY. A chaque déplacement infiniment petit $T_0T = dt$ de T correspond pour P un déplacement angulaire $d\varphi$ autour d'une caractéristique G passant par O; cherchons la vitesse $\left(G\,\frac{d\varphi}{dt}\right)$ pour chacun des déplacements de T considérés.

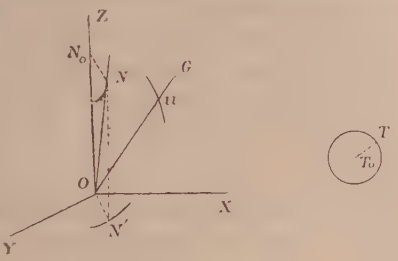
Traçons dans le plan des $\alpha\beta$ un cercle de centre $T_0$ de rayon $dt$. Le plan P a pour équation $z = da.\,x + db.y$, puisque sa position initiale $P_0$ est le plan $z = 0$ et que les plans P et $P_0$ se coupent suivant une droite passant par O. On a d'ailleurs :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta \quad \text{et} \quad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta. \qquad (1)$$

Cela posé prenons sur les normales aux plans $P_0$ et P les longueurs $ON_0 = ON = 1$, l'angle $NO\,N_0$ est l'angle $d\varphi$ et l'on a $d\varphi = \sqrt{da^2 + db^2}$ ; projetons le point N sur le plan des XY, ses coordonnées sont alors $da$ et $db$ et par conséquent d'après les équations (1) le point projeté N' décrit une ellipse homographique au cercle $T_0$; l'équation de cette ellipse est (8).

$$\begin{vmatrix} da & p_1 \\ db & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} da & q_1 \\ db & q_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2 dt^2.$$

Mais le rayon $d\varphi$ de cette ellipse est évidemment perpendiculaire à la caractéristique G; si nous portons sur G la vitesse $\frac{d\varphi}{dt}$, l'extrémité U de cette vitesse décrit une ellipse semblable à la précédente; faiso nstourner celle-ci de l'angle $\frac{\pi}{2}$ et divisons ses rayons par $dt$ nous aurons la seconde ellipse, que nous appellerons l'ellipse des vitesses du plan $P_0$ au point O; cette ellipse est homographique au cercle $T_0$.




**46.** Ainsi, en résumé, lorsque T se déplace à partir d'une position initiale $T_0$, sur une surface suivant les diverses trajectoires passant par $T_0$, les caractéristiques du plan $P_0$ relatives à ces diverses trajectoires concourent en un point O et les vitesses portées sur ces caractéristiques sont les rayons d'une ellipse homographique à un cercle de centre $T_0$.

L'équation de cette ellipse des vitesses est évidemment

$$\begin{vmatrix} X & p_1 \\ Y & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & q_1 \\ Y & q_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2 \qquad (2)$$

à la condition de prendre l'axe des X pour l'axe des Y et inversement à cause de la rotation $\frac{\pi}{2}$.

A deux trajectoires rectangulaires en $T_0$ correspondent deux vitesses conjuguées en O, c'est-à-dire deux vitesses dirigées suivant des diamètres conjugués de l'ellipse (2).

On a entre ces vitesses conjuguées les relations connues. L'équation précédente (2) étant la même que celle qui donne l'ellipse des vitesses dans le mouvement à d. d. d'un point (8) on peut se demander la signification de l'expression $V = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$ dans le cas du plan mobile.

V est, comme on sait, le produit des axes de l'ellipse (2) ou le rapport $\frac{d\sigma}{ds}$, $d\sigma$ étant l'aire de l'ellipse décrite par N ou N′ et $ds$ l'aire du cercle de centre $T_0$ et de rayon $dt$.

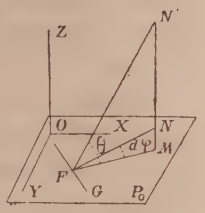
Mais dans son déplacement à d. d. le plan P enveloppe une portion $ds$ de la surface S à laquelle il reste tangent, le contour de cette portion $ds$ étant le lieu des points de contact de P avec S, ces points de contact correspondant aux points du cercle $T_0$. Dès lors le cône de sommet O ayant pour base l'ellipse décrite par N représente la courbure de cette portion de surface $ds$; $\frac{d\sigma}{ds}$ est donc le rapport de cette courbure à l'aire décrite par le point T. On peut, par analogie, appeler ce rapport V la vitesse à d. d. du plan P et la considérer comme un point numérique (OV).

**47.** Supposons maintenant que T ait un déplacement à t. d. infiniment petit à partir de la position initiale $T_0$. Ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici nous prendrons comme éléments de trajectoires décrits par T les rayons égaux à $dt$ d'une sphère de centre $T_0$; si le point T décrit une surface nous remplacerons l'élément de cette surface par la section que son plan tangent en $T_0$ fait dans la sphère, section qui est un grand cercle.

Lorsque le point T décrit la sphère dont nous venons de parler, le plan P enveloppe un hyperboloïde à deux nappes symétriques par rapport au plan $P_0$ (44) que nous désignerons par la lettre H. Le plan tangent à H faisant un angle infiniment petit avec le plan $P_0$, la coordonnée $z$ de l'hyperboloïde est infiniment petite; soit (Gω) la vitesse de ce déplacement angulaire $\widehat{P_0P}$ correspondant à un rayon de la sphère $T_0$; le plan P touche H au point N, l'ordonnée $z = MN$ étant infiniment petite. Cela posé prenons $MN' = \frac{MN}{dt}$, MN′ est alors fini et le point N′ engendre, comme on sait, un second hyperboloïde H′ à deux nappes symétriques par rapport au plan $P_0$. Ce plan donne d'ailleurs dans les deux hyperboloïdes la même section principale imaginaire; les équations de H et de H′ ne diffèrent en effet que parce que leurs ordonnées $z$ sont dans un rapport constant, on a donc les mêmes sections pour $z = 0$.

De plus, les plans P et P′ tangents à H et H′ en N et N′ se rencon-

trent suivant la droite G du plan $P_0$. Abaissons la perpendiculaire MF sur G et joignons F à N et N′, les angles des plans $P_0$, P et P′ sont les angles des droites FM, FN et FN′ ; mais on a $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{NFM}{dt} = \frac{NM}{MF.dt}$, d'où $\omega = \frac{N'M}{MF} = \operatorname{tg}\theta$, $\theta$ étant l'angle N′FM. Ainsi dans le déplacement qui a pour vitesse (Gω), ω est la tangente de l'angle $\theta$ que fait avec $P_0$ le plan tangent mené par G à l'hyperboloïde H′ ; pour cette raison nous appellerons H′ l'hyperboloïde des vitesses.




**48.** Cet hyperboloïde des vitesses va nous donner toutes les circonstances du déplacement à t. d. du plan P.

Quand le point T décrit une surface passant par $T_0$, les trajectoires de T sont les rayons de la sphère $T_0$ situés dans un même plan ; à ces rayons correspondent des droites G, concourantes en I, situées dans le plan $P_0$ (44) ; ce point I est le point où $P_0$ touche sa surface enveloppe dans le déplacement à d. d. considéré. Dans ce déplacement le plan P′ tangent à l'hyperboloïde H′ passe par le point fixe I et enveloppe un cône du second degré circonscrit à H′ ; ce cône est symétrique évidemment par rapport au plan $P_0$ et n'a aucune génératrice dans ce plan, car ses génératrices dans ce plan sont les tangentes imaginaires menées du point I à la conique imaginaire intersection de H′ et de $P_0$ ; le plan P′ tangent à ce cône et passant par G fait donc avec le plan $P_0$ l'angle $\theta$ tel que l'on a $\operatorname{tg}\theta = \omega$ ; nous savons que si l'on porte sur G à partir du point I une longueur égale à ω ou $\operatorname{tg}\theta$, cette longueur est le rayon de l'ellipse des vitesses en I pour le déplacement à d. d. considéré (45). Le plan $P_0$ est un plan principal du cône ; la symétrie indique que ses deux autres plans principaux perpendiculaires à $P_0$ coupent $P_0$ suivant les axes de l'ellipse des vitesses.

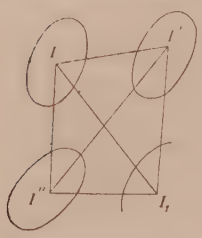
**49.** Chaque surface ou, ce qui revient au même, chaque plan R passant par $T_0$ définit un déplacement à d. d. du plan P, avec un point I corrélatif du plan R, de sorte qu'à un ensemble quelconque de plans R passant par $T_0$ correspond dans le plan $P_0$ un

ensemble de points I formant une figure corrélative; de plus chaque point I est le centre d'une ellipse des vitesses. Prenons trois plans R formant un trièdre trirectangle, c'est-à-dire un système de trois plans diamétraux conjugués de la sphère $T_0$, la figure corrélative est dans le plan $P_0$ un triangle réciproque par rapport à l'ellipse imaginaire E intersection de H′ et du plan $P_0$ (44).

Ces considérations vont nous permettre de déterminer l'ellipse des vitesses en un point I quelconque de $P_0$.

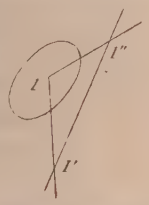
Prenons d'abord deux plans quelconques R et R′ passant par $T_0$ et les points corrélatifs I et I′ dans le plan $P_0$, la droite II′ est corrélative de la droite L intersection de R et R′; donc II′ est la caractéristique du plan $P_0$ pour un déplacement à u. d. de T suivant L : si ω est la vitesse du plan pour ce déplacement, les ellipses des vitesses en I et I′ ont évidemment, suivant la droite II′ des rayons égaux à ω.

Ainsi la droite qui joint deux points I et I′ du plan $P_0$ donne des rayons égaux dans les ellipses des vitesses de ces deux points. Il suit de là que si l'on connaît les ellipses des vitesses en trois points I, I′ et I″ on peut construire l'ellipse des vitesses en un point quelconque $I_1$. Il suffit pour cela de joindre le point $I_1$ aux trois points I, I′ et I″, les droites $I_1I$, $I_1I'$ et $I_1I''$ donnent dans les ellipses des vitesses de ces trois points trois rayons qui, ramenés en $I_1$, sont trois rayons de l'ellipse du point $I_1$; cette ellipse est ainsi déterminée.



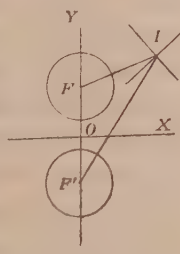

**50.** L'ellipse des vitesses du point I correspondant au plan R est, avons-nous dit (45), homographique au cercle suivant lequel R coupe la sphère $T_0$. Cette ellipse des vitesses devient donc un cercle quand deux diamètres conjugués quelconques correspondant à deux rayons perpendiculaires du cercle sont eux-mêmes perpendiculaires. Cela posé prenons dans l'ellipse imaginaire E, intersection de H′ et de $P_0$, la polaire du point I, puis sur cette polaire deux points I′I″ conjugués harmoniques par rapport aux deux points de rencontre de cette polaire avec l'ellipse E; le triangle II′I″ est un triangle réciproque et correspond par suite à un

trièdre trirectangle en $T_0$, il en résulte évidemment que les deux droites II′ et II″ correspondent aux deux arêtes perpendiculaires de ce trièdre situées dans le plan R; donc, dans l'ellipse des vitesses en I, II′ et II″ sont deux directions conjuguées. Il faut donc pour que cette ellipse soit un cercle que l'angle en I soit droit quels que soient les deux conjugués harmoniques I′ et I″ situés sur la polaire de I.




Or, on sait que cela a lieu seulement quand le point I est un foyer de l'ellipse E, I′I″ est alors la directrice correspondante. L'ellipse imaginaire E, rapportée à ses axes, a pour équation $\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$. Si l'on a $a > b$, cette ellipse a deux foyers réels situés sur l'axe des Y, F et F′, à une distance du centre égale à $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Ainsi en ces deux points F et F′ les ellipses des vitesses du plan $P_0$ sont des cercles; ces cercles sont d'ailleurs égaux, car la droite FF′ doit donner des rayons égaux dans les ellipses des vitesses en F et F′ (49).

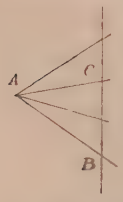
Joignons un point I quelconque du plan $P_0$ aux deux foyers F et F′, les rayons égaux des deux cercles F et F′ dirigés suivant IF et IF′ sont deux rayons de l'ellipse des vitesses en I (49) : ces rayons étant égaux sont également inclinés sur les axes de cette ellipse; ces axes sont donc les bissectrices de IF et IF′ : on sait que ces bissectrices sont les tangentes aux deux coniques homofocales de foyers F et F′ passant par I.




Il est évident que les ellipses des vitesses pour les différents points du plan sont distribuées symétriquement par rapport aux axes OX et OY.

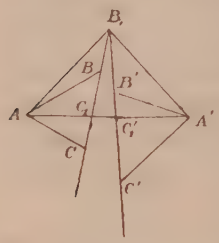
**51.** Prenons un triangle réciproque par rapport à l'ellipse E, les côtés de ce triangle ABC, avec les vitesses $\omega_a$, $\omega_b$ et $\omega_c$, correspondant à trois déplacements rectangulaires du point T (49) ; les côtés AB et AC correspondant à deux déplacements rectangulaires de T, les vitesses $\omega_b$ et $\omega_c$ dirigées suivant ces côtés sont deux rayons conjugués de l'ellipse des vitesses du point A (46) : mais BC est la polaire du point A dans l'ellipse E et les points B et C

sont conjugués harmoniques par rapport à cette ellipse (49). Si donc nous déplaçons à la fois B et C sur la droite BC de façon




que B et C soient toujours conjugués harmoniques, le triangle ABC reste réciproque, $\omega_a$ reste fixe et $\omega_b$ et $\omega_c$ sont toujours deux rayons conjugués de l'ellipse des vitesses en A, de sorte que l'on a $\omega_b^2 + \omega_c^2 =$ const. et par suite aussi $\omega_a^2 + \omega_b^2 + \omega_c^2 =$ const.

Ainsi cette somme de carrés reste constante quand le triangle ABC varie, comme nous venons de l'indiquer, en restant réciproque. Désignons par $u^2$ cette somme de carrés : soit maintenant $u'^2$ cette même somme dans un second triangle réci-




proque A'B'C'. Si $B_1$ est le point de rencontre des côtés BC et B'C', on peut d'après ce qui précède remplacer respectivement les triangles ABC et A'B'C' par les deux nouveaux triangles réciproques $AB_1C_1$ et $A'B_1C'_1$ sans altérer les quantités $u^2$ et $u'^2$. Dans ces conditions le côté $AC_1$ est la polaire du point $B_1$; il en est de même du côté $A'C'_1$, c'est-à-dire que ces côtés sont sur une même ligne droite; on peut donc passer du triangle $B_1A'C'_1$ au triangle $B_1AC_1$ sans modifier la somme $u'^2$; il en résulte qu'on a $u'^2 = u^2$. Donc la somme des carrés de trois vitesses dirigées suivant les côtés d'un triangle réciproque est constante.

La démonstration analytique de ce théorème est d'ailleurs très simple ; si dans les formules (43) :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \quad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma$$

on désigne par $\lambda\ \mu\ \nu$ les cosinus $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$ des angles que fait avec les axes la direction du déplacement $dt$, la vitesse $\omega$ est donnée (42) par la formule :

$$\omega^2 = (p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu)^2 + (p_2\lambda + q_2\mu + r_2\nu)^2.$$

Si l'on prend trois directions $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ et $\lambda''\mu''\nu''$ perpendiculaires entre elles, on a trois vitesses $\omega$, $\omega'$ et $\omega''$ dirigées suivant les côtés d'un triangle réciproque; les vitesses $\omega'$ et $\omega''$ sont données comme la précédente par les formules :

$$\omega'^2 = (p_1\lambda' + q_1\mu' + r_1\nu')^2 + (p_2\lambda' + q_2\mu' + r_2\nu')^2,$$
$$\omega''^2 = (p_1\lambda'' + q_1\mu'' + r_1\nu'')^2 + (p_2\lambda'' + q_2\mu'' + r_2\nu'')^2.$$

En ajoutant membre à membre ces trois équations, il vient en tenant compte des relations connues qui existent entre les cosinus des trois directions perpendiculaires, $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ et $\lambda''\mu''\nu''$.

$$\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + p_2^2 + q_2^2 + r_2^2.$$

Ainsi la somme $\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2$ est constante.

**52.** Cherchons maintenant l'équation de l'hyperboloïde des vitesses, ce qui nous donnera, en coupant par le plan $z = 0$, l'équation de l'ellipse imaginaire E.

Reprenons les formules du déplacement à t. d. d'un plan (43).

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \quad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma,$$
$$dc = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma.$$

On en déduit, en désignant par $\lambda\mu\nu$ les cosinus $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$ :

$$\frac{da}{dt} = p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu, \qquad \frac{db}{dt} = p_2\lambda + q_2\mu + r_2\nu,$$
$$\frac{dc}{dt} = p_3\lambda + q_3\mu + r_3\nu. \tag{1}$$

Mais l'équation du plan P mobile est, après le déplacement $dt$ de $T_1$ en supposant que la position initiale $P_0$ de P est le plan des XY :

$$z = da.x + dby + dc.$$

Ce plan enveloppe un hyperboloïde à deux nappes symétrique par rapport au plan des XY (47). On aura évidemment l'équation du plan tangent Q à l'hyperboloïde des vitesses en remplaçant dans l'équation du plan P, $z$ par $z\,dt$ (47) ce qui donne :

$$z = \frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt}. \tag{2}$$

Nous avons donc à chercher l'enveloppe de ce plan pour une direction $\lambda\mu\nu$ quelconque.

Si l'on pose, pour simplifier,

$$A = p_1x + p_2y + p_3, \quad B = q_1x + q_2y + q_3, \quad C = r_1x + r_2y + r_3, \tag{3}$$

l'équation (2) devient, en remplaçant $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ et $\frac{dc}{dt}$ par leurs valeurs (1) :

$$z = A\lambda + B\mu + C\nu. \tag{4}$$

Cette équation contient trois paramètres $\lambda\mu\nu$ liés par une équation de condition :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \tag{5}$$

Considérons donc $\nu$ comme une fonction de $\lambda$ et $\mu$, on a en prenant les dérivées partielles de l'équation (4) par rapport à $\lambda$ et $\mu$ :

$$A + C\frac{d\nu}{d\lambda} = 0, \qquad B + C\frac{d\nu}{d\mu} = 0. \tag{6}$$

L'équation (5) nous donne d'ailleurs les deux dérivées partielles $\frac{d\nu}{d\lambda}$ et $\frac{d\nu}{d\mu}$ :

$$\lambda + \nu\frac{d\nu}{d\lambda} = 0, \qquad \mu + \nu\frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Portons ces valeurs $\frac{d\nu}{d\lambda}$ et $\frac{d\mu}{d\lambda}$ dans les équations (6), il vient :

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{\mu}{B} = \frac{\nu}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

la dernière égalité résultant de l'équation (5).

Portons enfin ces valeurs de $\lambda\mu\nu$ dans l'équation (4) et nous avons l'équation de la surface enveloppe :

$$z = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

c'est-à-dire d'après les équations (3) :

$$z^2 = (p_1x + p_2y + p_3)^2 + (q_1x + q_2y + q_3)^2 + (r_1x + r_2y + r_3)^2.$$

Telle est l'équation de l'hyperboloïde des vitesses.

On voit qu'il est symétrique par rapport au plan des XY ; en faisant $z = 0$ on a l'équation de l'ellipse imaginaire E.

**53.** Nous terminerons cette théorie du déplacement d'un plan par une remarque générale.

Supposons qu'un point M et un plan P aient chacun un mouvement à t. d. infiniment petit en fonction du même point T; nous avons vu, d'une part, que M et T engendrent des figures homographiques (6), d'autre part que les déplacements de P et de T sont corrélatifs (43); donc les déplacements infiniment petits de M et de P sont corrélatifs; il s'agit là, remarquons-le bien, non pas de la corrélation générale des figures, mais d'un cas particulier seulement.

Cette corrélation particulière a l'avantage de s'étendre à la cinématique; elle nous a permis, par exemple, d'introduire dans la théorie du mouvement d'un plan, la vitesse de ce plan, comme grandeur corrélative de la vitesse d'un point.

Cette corrélation est du reste mise encore en évidence par l'analogie des formules relatives au point et de celles relatives au plan.

Il y a également corrélation entre le mouvement d'un point dans un plan et le mouvement d'une droite dans un plan : nous ajouterons que ce dernier mouvement peut aussi être considéré comme le mouvement d'un plan qui reste parallèle à une droite fixe, l'axe des Z par exemple; il suffit en effet de considérer alors le mouvement de sa trace sur le plan des XY.

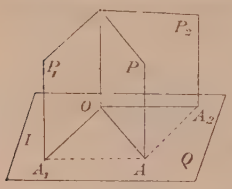
## VII

## Composition des plans numériques.

**54.** L'idée de point numérique appelle, comme idée corrélative, celle de plan numérique dont nous avons déjà parlé (4) et la composition des plans numériques est la théorie corrélative de la composition des points numériques.

Voici comment nous définirons le plan résultant $(Pp)$ de deux plans numériques $(P_1p_1)$ et $(P_2p_2)$; soit Q un plan perpendiculaire à l'intersection des plans $P_1$ et $P_2$; ce plan Q coupe $P_1$ et $P_2$ suivant les droites $L_1$ et $L_2$; transportons les nombres $p_1$ et $p_2$ des plans $P_1$ et $P_2$ aux droites $L_1$ et $L_2$, nous avons ainsi deux droites numériques $(L_1\,p_1)$ et $(L_2\,p_2)$, ou, ce qui revient au même, deux

segments $OA_1 = p_1$, $OA_2 = p_2$ (4); soit $OA = p$ la résultante de $OA_1$ et $OA_2$, le plan numérique $(P p)$ passant par OA et l'intersection de $P_1$ et $P_2$ est le résultant de $(P_1 p_1)$ et $(P_2 p_2)$, et nous dirons que nous avons composé ces deux plans.




Les angles du triangle $OAA_1$ étant les angles des plans P, $P_1$ et $P_2$, on a les relations :

$$\frac{\sin \widehat{PP_1}}{p_2} = \frac{\sin \widehat{PP_2}}{p_1} = \frac{\sin \widehat{P_1 P_2}}{p} \qquad (1)$$

qui définissent d'une part la position du plan P et d'autre part son nombre $p$.

On a encore la relation :

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos \widehat{P_1 P_2}. \qquad (2)$$

Nous appellerons moment d'un plan numérique $(P p)$ par rapport à un point le produit $ph$, $h$ étant la distance du point au plan; ce moment est nul, soit quand le nombre $p$ est nul, soit quand $h$ est nul, c'est-à-dire quand le point est situé dans le plan. Lorsqu'on fait varier le nombre $p$, le moment varie dans le même rapport.

Quand deux plans numériques ont même moment pour un même point de l'espace, d'ailleurs quelconque, ils coïncident et ont même nombre; ils coïncident parce que pour tout point de l'un d'eux l'un des moments est nul, l'autre moment l'est donc aussi, de sorte que le point appartient aux deux plans; de plus, ils ont même nombre, car les deux plans coïncidant, le facteur $h$ dans le produit $ph$ est le même pour les deux plans, l'égalité des moments exige donc que les deux nombres soient égaux. Ce raisonnement suppose que les nombres ne sont pas nuls.

Cela posé, revenons aux plans $(P_1 p_1)$, $(P_2 p_2)$ et à leur résultant $(P p)$ et prenons leurs moments par rapport à un point I; on peut toujours supposer que le plan Q passe par ce point I; on voit alors que les moments des plans sont simplement les moments des segments $OA_1$ $OA_2$ et OA, or OA étant la résultante de $OA_1$ et $OA_2$, on a, en désignant par le symbole $\mu$ ( ) un moment :

$$\mu(OA) = \mu(OA_1) + \mu(OA_2),$$

d'où :

$$\mu(Pp) = \mu(P_1p_1) + \mu(P_2p_2). \qquad (3)$$

Tout ce qui précède s'applique évidemment au cas limite où les deux plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles ; dans ce cas, le résultant P leur est également parallèle et l'on a $p = p_1 + p_2$.

Le plan P divise alors la distance des plans $P_1$ et $P_2$ dans le rapport inverse des nombres de ces deux plans.

**55.** Soit dans l'espace un système de plans numériques quelconques $(P_1p_1)$ $(P_2p_2)$.... On peut composer deux de ces plans, puis leur résultant et un troisième ; cette opération pratiquée ainsi de proche en proche nous donne finalement pour tout le système un résultant unique $(Pp)$. Le théorème des moments démontré pour deux plans numériques s'étend évidemment de proche en proche à un nombre quelconque de plans, de sorte qu'on a :

$$\mu(Pp) = \Sigma\mu(P_1p_1).$$

Il résulte de là que ce résultant $(Pp)$ est indépendant de l'ordre dans lequel on compose les plans du système, car son moment par rapport à un point est toujours $\Sigma\mu(P_1p_1)$, quel que soit l'ordre des plans ; si donc on compose de deux manières différentes les plans considérés, les deux plans résultants ont même moment par rapport à un même point d'ailleurs quelconque, par suite ces deux résultants ont même position et même nombre (54).

Si tous les plans sont parallèles entre eux, leur résultant leur est aussi parallèle et le nombre du résultant est la somme algébrique des nombres des composants.

Si tous les plans passent par une même droite ou sont parallèles à une même droite, il en est de même de leur résultant.

Enfin si les plans passent par un même point, leur résultant y passe aussi.

Les relations (1) et (2) qui existent entre les nombres des composants et du résultant sont homogènes par rapport à ces nombres, d'où cette conclusion, laquelle s'étend à autant de plans qu'on veut, que, si l'on modifie proportionnellement tous les nombres des plans ainsi que le nombre du résultant, le plan ré-

sultant avec son nombre modifié reste encore le résultant du système.

Le moment d'un système de plans numériques est le moment de leur résultant.

Deux systèmes sont dits équivalents quand ils ont même plan résultant en position et en nombre, ou, ce qui revient au même, quand ils ont même moment par rapport à un même plan, d'ailleurs quelconque.

**56.** Soit un système de $n$ plans numériques ; il peut arriver qu'après avoir composé $n-1$ de ces plans on ait pour résultant un plan coïncidant avec le $n^{ième}$ ayant même nombre que lui, mais de signe contraire ; dans ce cas, le résultant de ces deux plans coïncide évidemment avec eux et a pour nombre la somme algébrique de leurs deux nombres, c'est-à-dire zéro. On a ce que nous appellerons un système de résultant nul. Le moment de ce résultant de nombre nul est toujours nul ; donc le moment d'un pareil système par rapport à un point quelconque de l'espace est nul et réciproquement.

On obtient évidemment un système de résultant nul en adjoignant à un système de plans quelconques leur résultant changé de signe, c'est-à-dire le résultant avec un nombre égal et de signe contraire.

Réciproquement, dans un système de résultant nul un plan quelconque changé de signe est le résultant de tous les autres.

**57.** Supposons que le résultant des $n-1$ premiers plans d'un système et le dernier plan soient parallèles, de nombres égaux et de signe contraire. D'après ce que nous avons dit, la composition de deux plans parallèles revient évidemment, lorsqu'on coupe ces deux plans par un plan perpendiculaire Q, à la composition de leurs traces sur le plan Q, les nombres étant transportés des plans à leurs traces ; dans le cas actuel ces deux traces sont deux droites numériques ou deux segments formant couple.

Donc le résultant de ces deux plans est un plan rejeté à l'infini et de nombre nul ; nous dirons que ces deux plans forment couple.

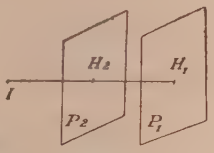
Cherchons le moment d'un couple $(P_1 p_1)$ et $(P_2 - p_1)$ par rap-

port au point I; abaissons la perpendiculaire commune $II_1 H_2$ aux deux plans; on a évidemment :

$$\mu(P_1 p_1) = IH_1 \times p_1 \quad \text{et} \quad \mu(P_2 - p_1) = IH_2 \times (-p_1),$$

d'où l'on tire :

$$\mu(P_1 p_1) + \mu(P_2 - p_1) = p_1 H_1 H_2.$$




C'est le moment du couple lequel est indépendant du point I. Ainsi le moment d'un couple par rapport à un point quelconque de l'espace est constant.

L'équivalence de deux systèmes de plans se définit soit par l'identité de leur résultant, soit par l'égalité de leur moment (55); cette seconde définition convient pour le cas des couples. Nous appellerons donc couples équivalents deux couples qui ont même moment; il est inutile de dire ici, même moment par rapport à un point quelconque de l'espace, puisque le moment d'un couple est le même quel que soit le point.

En résumé, un système de plans numériques peut donc se ramener toujours, au point de vue de l'équivalence, soit à un plan résultant qui peut avoir pour nombre zéro, soit à un couple.

Nous ajouterons que, dans un système de résultant nul, le résultant est indéterminé en position, car nous avons vu (56) que ce résultant se confond avec le plan qui est le dernier dans l'ordre de la composition, or ce plan est évidemment arbitraire; il est même absolument quelconque, car on peut, avant la composition, décomposer l'un des plans en deux autres et prendre l'un de ces derniers comme plan final.

**58.** Tous les résultats que nous venons de trouver peuvent se mettre en formules.

Représentons le plan numérique $(P_1 p_1)$ par l'équation $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ et posons $\delta_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$.

Représentons également les autres plans $(P_2 p_2)$ $(P_3 p_3)$... et leur résultant $(P p)$ par des équations du même genre.

Cherchons maintenant le moment de ces plans par rapport à un point $xyz$ et exprimons que le moment de $(P p)$ est la somme des moments des composants.

La distance du point $xyz$ au plan $P_1$ est $\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\delta_1}$ et le moment de ce plan est $p_1\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\delta_1}$; on doit donc avoir $\Sigma p_1\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\delta_1}=p\frac{ax+by+cz+d}{\delta}$, c'est-à-dire :

$$x\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}+y\Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}+z\Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1}+\Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=\frac{pa}{\delta}x+\frac{pb}{\delta}y+\frac{pc}{\delta}z+\frac{pd}{\delta}. \qquad (1)$$

Cette égalité devant avoir lieu pour un point quelconque, c'est-à-dire quels que soient $x, y, z$, on a :

$$\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}=\frac{pa}{\delta},\quad \Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}=\frac{pb}{\delta},\quad \Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1}=\frac{pc}{\delta},\quad \Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=\frac{pd}{\delta} \qquad (2)$$

Ces quatre équations déterminent les coefficients de l'équation $ax+by+cz+d=0$ du plan numérique et son nombre $p$. L'expression $\frac{d}{\delta}$ représente évidemment la distance du plan P à l'origine des coordonnées; $\frac{pd}{\delta}$ est donc le moment du plan $(Pp)$ pour l'origine des coordonnées et l'égalité $\Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=\frac{pd}{\delta}$ exprime le théorème des moments pour ce point particulier. On a $a^2+b^2+c^2=\delta^2$; par conséquent, les trois premières équations (2) élevées au carré et ajoutées membre à membre donnent :

$$\left(\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}\right)^2+\left(\Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}\right)^2+\left(\Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1}\right)^2=p^2. \qquad (3)$$

On peut également obtenir $p$ sous une forme indépendante des axes des coordonnées; si, en effet, on développe les carrés des trois sommes, on voit que les carrés peuvent se grouper par trois termes comme $\frac{p_1^2a_1^2}{\delta_1^2}+\frac{p_1^2b_1^2}{\delta_1^2}+\frac{p_1^2c_1^2}{\delta_1^2}=p_1^2$ et que les doubles produits peuvent se grouper également par trois termes comme

$2\left[\frac{p_1p_2a_1a_2}{\delta_1\delta_2}+\frac{p_1p_2b_1b_2}{\delta_1\delta_2}+\frac{p_1p_2c_1c_2}{\delta_1\delta_2}\right]$, ce qui est égal à $2p_1p_2\cos\widehat{P_1P_2}$; on a ainsi finalement :

$$p^2=\Sigma p_1^2+2\Sigma p_1p_2\cos\widehat{P_1P_2}. \qquad (4)$$

Quand tous les plans sont parallèles, on a $\cos\widehat{P_1P_2}=1$, et il vient $p^2=\Sigma p_1^{\,2}+2\Sigma p_1p_2=(\Sigma p_1)^2$, $p=\Sigma p_1$, comme nous le savions déjà.

**59.** Dans un système à résultant nul, le moment est nul pour un point $(xyz)$ quelconque; on doit donc avoir, dans l'équation des moments (1) :

$$\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=0.$$

D'après cela, l'équation (3) donne $p=0$ et les équations (2) donnent pour les coefficients $a, b, c, d$ de l'équation du plan résultant des expressions de la forme $\frac{0}{0}$. Ainsi le résultant a un nombre nul et est indéterminé de position.

Quand le système se ramène à un couple de plans, le moment est constant quel que soit le point $(xyz)$; on doit donc avoir dans l'équation (1) :

$$\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1}=0,\quad \Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=\frac{pd}{\delta};$$

$\frac{pd}{\delta}$ ne peut d'ailleurs être nul, car on retomberait alors dans le cas précédent. $\Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}$ ou $\frac{pd}{\delta}$ est le moment constant du système, il est égal au moment pris par rapport à l'origine. D'après l'équation (3), le nombre $p$ est nul et d'après les équations (2) $a, b$ et $c$ sont nuls, de sorte que le plan résultant $ax+by+cz+d=0$ est rejeté à l'infini et a pour nombre zéro.

Disons enfin que les équations qui expriment l'équivalence de deux systèmes sont évidemment :

$$\Sigma\frac{p_1a_1}{\delta_1}=\Sigma\frac{p_1'a_1'}{\delta_1'},\quad \Sigma\frac{p_1b_1}{\delta_1}=\Sigma\frac{p_1'b_1'}{\delta_1'},\quad \Sigma\frac{p_1c_1}{\delta_1'}=\Sigma\frac{p_1'c_1'}{\delta_1'},$$
$$\Sigma\frac{p_1d_1}{\delta_1}=\Sigma\frac{p_1'd_1'}{\delta_1'}.$$

Ces formules expriment que les deux systèmes ont même moment par rapport à un même point quelconque de l'espace.

On voit que cette théorie de la composition des plans numériques est tout à fait analogue à celle de la composition des points numériques (22) : la seule comparaison des formules dans les deux théories met cette analogie en évidence.

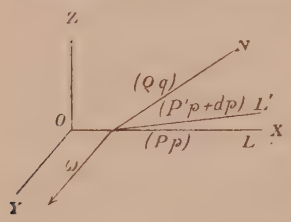
## VIII

## Mouvement des plans numériques.

**60.** Soit un plan numérique (P$p$) qui se déplace en fonction de T ; nous voulons dire par là que P a une position et un nombre pour chaque position de T.

Prenons d'abord le cas particulier où P reste perpendiculaire à un plan fixe que nous supposerons être le plan des YZ ; si l'on transporte le nombre $p$ du plan à sa trace L sur le plan de YZ, le mouvement du plan se ramène au mouvement de la droite numérique (L$p$) dans le plan des YZ (53). Ce mouvement est, comme on le sait, à u. ou à d. d.

Donnons à T un déplacement à u. d. infiniment petit $dt$ ; la droite (L$p$) devient après ce déplacement la droite (L′$p + dp$). Cela posé, prenons une troisième droite numérique (N$q$) passant par l'intersection des deux premières et telle que (L′$p + dp$) soit la résultante de (L$p$) et de (N$qdt$) (14), la droite numérique (N$q$) est dite l'associée de la droite (L$p$).




Remarquons d'abord qu'on peut considérer les droites L, L′ et N comme les traces de trois plans P, P′ et Q passant par une même droite D sur un plan normal à D ; la droite D est alors la vitesse à u. d. du plan P pour le déplacement $dt$ et le plan numérique (Q$q$) est, par définition, l'associé du plan P$p$ dans ce déplacement à u. d. Ainsi les formules relatives au plan associé (Q$q$) ou à la droite associée (N$q$) sont les mêmes.

Exprimons donc que (P′$p + dp$) est le résultant de (P$p$) et de (Q$qdt$), il vient (54) :

$$\frac{\sin \widehat{PP'}}{qdt} = \frac{\sin \widehat{QP'}}{p} = \frac{\sin \widehat{QP}}{p+dp} = \frac{\sin \widehat{QP} - \sin \widehat{QP'}}{dp} = \frac{2 \sin \frac{\widehat{PP'}}{2} \cos \widehat{QP}}{dp}.$$

L'angle $\widehat{PP'}$ étant infiniment petit, la comparaison du premier rapport et du dernier donne :

$$q = \frac{\frac{dp}{dt}}{\cos \widehat{QP}}. \qquad (1)$$

Si $\omega$ est la vitesse du plan P ou, ce qui revient au même, de la droite L, on a $\widehat{PP'} = \omega dt$, et l'égalité des rapports $\frac{\sin \widehat{QP}}{p+dp}$ et $\frac{\widehat{PP'} \cos \widehat{QP}}{dp}$ nous donne :

$$\operatorname{tg} \widehat{QP} = \frac{p.\omega}{\frac{dp}{dt}}. \qquad (2)$$

Les deux équations (1) et (2) déterminent donc les éléments du plan associé, savoir son angle avec le plan P et son nombre $q$.

**61.** Cette droite N peut aussi être déterminée analytiquement. Si $y = ax + b$ est l'équation de la droite mobile L, $a$ et $b$ étant des fonctions des coordonnées de T, la droite L′ a pour équation $y = (a + da)x + b + db$, $da$ et $db$ correspondant au déplacement $dt$ de T. Pour simplifier le calcul, supposons que la position initiale L soit l'axe des X, les équations de L et L′ sont alors :

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = da.x + db.$$

Ces deux droites se coupent en un point dont les coordonnées sont $y = 0$ et $x = -\frac{db}{da}$. La droite associée N passant par ce point, a pour équation $y = \operatorname{tg} \widehat{QP} \left( x + \frac{db}{da} \right)$. Remplaçons $\operatorname{tg} \widehat{QP}$

par sa valeur $\frac{p\omega}{\frac{dp}{dt}}$ (61) en remarquant que $\omega$ est égal à $\frac{da}{dt}$ (35); il vient finalement :

$$y = p\left(\frac{da}{dp}x + \frac{db}{dp}\right). \qquad (3)$$

Telle est l'équation de la droite associée N.

**62.** Supposons maintenant que L ait un déplacement infiniment petit à d. d. en fonction des coordonnées $\alpha$ et $\beta$ de T. A chaque déplacement à u. d. de T correspondent sur L un point numérique qui représente sa vitesse (35) et une droite associée N passant par ce point.

Soient comme précédemment :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta, \quad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta, \quad dp = a d\alpha + b d\beta, \quad (4)$$

les équations qui définissent le déplacement à d. d. infiniment petit de L. L'équation (3) devient, en y remplaçant $da$, $db$ et $dp$ par leurs valeurs en $d\alpha$ et $d\beta$ (4) :

$$(a d\alpha + b d\beta) y = p[(p_1 d\alpha + q_1 d\beta)x + p_2 d\alpha + q_2 d\beta]$$

ou :

$$[ay - p(p_1 x + p_2)]d\alpha + [by - p(q_1 x + q_2)]d\beta = 0. \quad (5)$$

Il suit de là que lorsqu'on fait varier la direction du déplacement à u. d. $dt$ de T, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier le rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$, l'équation (5) représente une droite qui passe par un point fixe, intersection des deux droites $ay = p(p_1 x + p_2)$ et $by = p(q_1 x + q_2)$.

Ainsi, dans le déplacement à d. d. de L, toutes les droites associées passent par un point fixe : nous appellerons associées conjuguées celles qui correspondent à deux déplacements perpendiculaires de T ; il suit de là que deux associées conjuguées coupent L en deux points qui représentent des vitesses conjuguées de L ; ces deux points sont donc en involution (38) et par suite aussi les deux associées conjuguées ; les rayons doubles sont imaginaires et il y a un couple d'associées conjuguées rectangulaires.

**63.** Soit I le point de rencontre de toutes les associées ; por-

tons sur N à partir de ce point I une longueur égale à $q$ dont nous désignerons l'extrémité par la lettre N. Prenons pour axes les parallèles IX′ et IY′ à OX et OY et désignons par X′ et Y′ les coordonnées du point N par rapport aux nouveaux axes. On a (60), en remarquant que l'angle NIX′ n'est pas autre chose que l'angle $\widehat{PQ}$ :

$$q = \frac{\dfrac{dp}{dt}}{\cos \mathrm{NIX}'} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \mathrm{NIX}' = \frac{p\omega}{\dfrac{dp}{dt}},$$

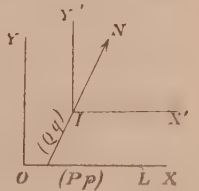
d'où l'on déduit $\sin \mathrm{NIX}' = \dfrac{p\omega}{q}$.

Il vient donc $q \cos \mathrm{NIX}' = \mathrm{X}' = \dfrac{dp}{dt}$ et $q \sin \mathrm{NIX}' = \mathrm{Y}' = p\omega = p^2 \dfrac{da}{dt}$ (35).

On déduit de là :

$$\mathrm{X}' = \frac{dp}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dp}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} - a\frac{d\alpha}{dt} + b\frac{d\beta}{dt} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}' = p\left[p_1\frac{d\alpha}{dt} + q_1\frac{d\beta}{dt}\right].$$

Tirons $\dfrac{d\alpha}{dt}$ et $\dfrac{d\beta}{dt}$ de ces équations et portons leurs valeurs dans l'expression $\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\beta}{dt}\right)^2 = 1$, il vient :




$$\begin{vmatrix} \mathrm{X}' & a \\ \mathrm{Y}' & pp_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathrm{X}' & b \\ \mathrm{Y}' & pq_1 \end{vmatrix}^2 = p^2 \begin{vmatrix} a & b \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}^2$$

C'est l'équation du lieu du point N ; on reconnaît immédiatement que ce lieu est une ellipse homographique au cercle infiniment petit de rayon $dt$ que décrit T ; à deux rayons perpendiculaires de ce cercle correspondent deux rayons conjugués de cette ellipse et comme ces deux rayons conjugués sont dirigés suivant deux associées conjuguées, on en conclut que deux vitesses conjuguées de L sont représentées par deux points qui appartiennent à deux rayons conjugués de cette ellipse.

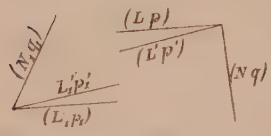
Comme cas particulier, nous citerons seulement celui où le nombre $p$, qui est une fonction de $\alpha$ et de $\beta$, passe par un maximum ou un minimum ; dans ce cas, les dérivées partielles $a$ et $b$

sont nulles ; les deux équations qui donnent le point de rencontre des associées (62) représentent un point situé à l'infini dans la direction OY perpendiculaire à L ; il en résulte que toutes les droites associées sont perpendiculaires à L ; la formule précédente $q \sin \mathrm{NIX}' = p\omega$ se réduit alors à $q = p\omega$, puisque l'angle NIX' est droit. Ainsi $q$ est proportionnel à $\omega$.

Remarquons enfin que, dans le cas général, si $(Nq)$ et $(N'q')$ sont des associées conjuguées, $q$ et $q'$ sont deux rayons conjugués de l'ellipse, lieu du point N ; on a donc $q^2 + q'^2 = \text{const.}$ et $qq \sin \mathrm{NIN}' = \text{const.}$

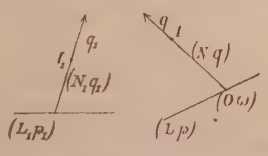
**64.** Considérons un système de plans numériques $(P_1 p_1)$, $(P_2 p_2)$, etc., perpendiculaires à un même plan et soient $L_1$, $L_2$... leurs traces sur ce plan ; transportons les nombres $p_1$, $p_2$... des plans aux droites $L_1$, $L_2$... ou, ce qui revient au même (*4*), prenons sur les droites des segments de longueur $p_1, p_2$... ; la composition des plans numériques $(P_1 p_1)$, $(P_2 p_2)$... revient, comme on sait (*54*), à la composition des droites numériques, c'est-à-dire des segments $p_1$, $p_2$... ; on sait d'ailleurs que, ces segments étant tous dans un même plan, on peut les composer de proche en proche et les ramener à un seul résultant qui correspond précisément au plan résultant du système des plans numériques.

Cela posé, supposons que ces droites $L_1$, $L_2$... aient toutes un déplacement infiniment petit à u. d. correspondant au déplacement $dt$ de T ; la résultante $(Lp)$ de ce système de droites numériques se déplace en même temps que ces droites : après le déplacement $dt$ les droites deviennent $(L_1' p_1')$... et $(L'p')$, cette dernière étant la résultante de $(L_1' p_1')$...




Prenons les droites associées $(N_1 q_1)$... et leur résultante $(Nq)$ ; $(Lp)$ est la résultante de $(L_1 p_1)$... ; d'autre part, $(Nq\,dt)$ est la résultante de $(N_1 q_1\,dt)$.... ; enfin, chaque droite $(L_1' p_1')$ est la résultante de $(L_1 p_1)$ et $(N_1 q_1\,dt)$ (60) ; il résulte évidemment de là que la droite $(L'p')$, résultante des droites $(L_1' p_1')$, est la résultante des deux droites $(Lp)$ et $Nq\,dt)$ ; par conséquent, $(Nq)$ est l'associée de $(Lp)$ (60). Donc l'associée de la résultante des droites mobiles est la résultante des associées de ces droites.

**65.** Supposons maintenant que les droites aient toutes un déplacement à d. d., chaque déplacement à u. d. correspondant comme précédemment au déplacement de T suivant un rayon du cercle de centre T et de rayon $dt$. Dans ce déplacement à d. d. toutes les associées d'une même droite passent par un même point (62) ; soient $I_1, I_2 \ldots I$ ces divers points fixes pour les droites $L_1, L_2 \ldots$ et leur résultante L : représentons maintenant chaque associée comme $(N_1 q_1)$ par un segment $q_1$ porté sur $N_1$ à partir du point $I_1$, le segment $q$ est le résultant des segments $q_1$ (64) ; mais, dans le mouvement à d. d., ces segments engendrent des ellipses homographiques au cercle de centre T (63); soient $E_1, E_2 \ldots$ E ces diverses ellipses de centres $I_1, I_2 \ldots I$, homographiques entre elles ; à un rayon du cercle T correspondent dans ces ellipses des rayons homologues et le rayon de E est le résultant des rayons des autres ellipses. Pour cette raison nous dirons que l'ellipse E est l'ellipse résultante des ellipses homographiques $E_1, E_2 \ldots$ Cette question nous fournit un premier exemple d'une théorie générale, celle de la composition des ellipses homographiques, que nous exposerons dans la suite.




A deux rayons perpendiculaires du cercle T correspondent dans toutes ces ellipses deux rayons conjugués : d'où il suit que deux systèmes d'associées conjuguées des droites $L_1 \ldots$ nous donnent par composition deux associées conjuguées de L, c'est-à-dire deux rayons conjugués de l'ellipse E, laquelle est ainsi déterminée. La connaissance de cette ellipse E nous permet de déterminer pour chaque déplacement à u. d. de la résultante $(Lp)$ la vitesse $\omega$ de ce déplacement et la variation $dp$ du nombre $p$. Cherchons, en effet, la vitesse $(O\omega)$ de la droite pour une rotation autour du point O de cette droite ; si $q$ est le rayon de l'ellipse passant par O, on a, d'après les formules précédentes (60) :

$$q = \frac{\dfrac{dp}{dt}}{\cos \mathrm{LN}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \widehat{\mathrm{LN}} = \frac{p.\omega}{\dfrac{dp}{dt}},$$

ce qui détermine $\omega$ et $\frac{dp}{dt}$, puisqu'on connaît l'angle $\widehat{LN}$ et le nombre $p$.

**66.** Revenons au cas général du mouvement d'un plan (P$p$) en fonction de T : nous avons défini pour un déplacement à u. d. de ce plan ce que nous entendions par son plan associé (Q$q$) (60) ; ce plan associé passe par la droite qui représente la vitesse du plan P (60) et son angle avec P ainsi que son nombre $q$ sont donnés par les formules

$$q = \frac{\frac{dp}{dt}}{\cos \widehat{PQ}}, \qquad \operatorname{tg} \widehat{PQ} = \frac{p.\omega}{\frac{dp}{dt}}.$$

Déterminons analytiquement la position de ce plan Q. Si nous prenons comme plan des XY le plan (P$p$), ce plan P, sa position infiniment voisine P' après le déplacement $dt$ de T et le plan associé (Q$q$) ont respectivement pour équations :

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}p) && z = 0, \\ &(\mathrm{P}'p + dp) && z = da.x + db.y + dc, \\ &(\mathrm{Q}q) && z = \mathrm{K}\left(\frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt}\right), \end{aligned}$$

le plan Q passant par l'intersection des deux premiers et K étant un coefficient à déterminer.

Pour trouver K, exprimons que (P'$p$ + $dp$) est le résultant de (P$p$) et de (Q$qdt$) (60); il suffit pour cela d'écrire que le moment de (P'$p$ + $dp$) pour un point quelconque $xyz$ est égal à la somme des moments des deux autres plans (P$p$) et (Q$qdt$) (54) ; nous avons ainsi l'équation :

$$\begin{aligned} &(p + dp)\,(z - da.x - db.y - dc) = \\ &pz + \frac{q}{\Delta}\,dt\left(z - \mathrm{K}\frac{da}{dt}x - \mathrm{K}\frac{db}{dt}y - \mathrm{K}\frac{dc}{dt}\right), \end{aligned}$$

en désignant par $\Delta$ le radical $\sqrt{1 + \mathrm{K}^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]}$.

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient $x$, $y$ et $z$, on a

notamment, en égalant les coefficients de $z$ dans les deux membres, $dp = \frac{q}{\Delta}\,dt$, et en égalant de même les coefficients de $x$, $p = \mathrm{K}\frac{q}{\Delta}$ ; d'où, en éliminant $\Delta$, $p = \mathrm{K}\frac{dp}{dt}$ et $\mathrm{K} = \frac{p}{\frac{dp}{dt}}$ ; portons cette valeur de K dans l'équation du plan Q, il vient :

$$z = \frac{p}{\frac{dp}{dt}}\left(\frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt}\right).$$

Telle est l'équation du plan associé ; on peut aussi la mettre sous la forme :

$$\frac{dp}{dt}z = p\left(\frac{da}{dt}x + \frac{db}{dt}y + \frac{dc}{dt}\right).$$

Le nombre $q$ de ce plan associé est donné par la formule rappelée plus haut $q = \frac{\frac{dp}{dt}}{\cos\widehat{\mathrm{PQ}}}$ ; or, d'après les équations des plans P et Q, on a :

$$\cos\widehat{\mathrm{PQ}} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]}}.$$

On en déduit :

$$q = \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]}.$$

Nous avons, pour la vitesse $\omega$ du plan P dans un mouvement à u. d., l'expression (42) $\omega^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2$ ; d'après cela, $q$ peut se mettre sous la forme :

$$q = \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p^2\omega^2}.$$

Le plan associé (Q$q$) est ainsi déterminé en position et en nombre.

**67.** Le plan P et son nombre $p$ variant avec les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du point T, écrivons comme suit les équations différentielles du mouvement :

$$da = p_1 d\alpha + q_1 d\beta + r_1 d\gamma, \qquad db = p_2 d\alpha + q_2 d\beta + r_2 d\gamma,$$
$$dc = p_3 d\alpha + q_3 d\beta + r_3 d\gamma \quad \text{et} \quad dp = l d\alpha + m d\beta + n d\gamma.$$

Portons ces valeurs de $da$ $db$ $dc$ et $dp$ dans l'équation du plan associé Q, il vient :

$$[lz - p(p_1 x + p_2 y + p_3)]\frac{d\alpha}{dt} + [mz - p(q_1 x + q_2 y + q_3)]\frac{d\beta}{dt} +$$
$$[nz - p(r_1 x + r_2 y + r_3)]\frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Représentons comme toujours les déplacements à u. d. de T par les rayons d'une sphère de centre T et de rayon $dt$. Les rapports $\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt}$ représentent la direction de l'un de ces rayons ; et à ce rayon correspond un déplacement à u. d. du plan P ainsi que le plan associé Q ; l'équation précédente trouvée pour Q montre donc que tous les plans associés de P passent par un point fixe déterminé par les trois équations :

$$lz = p(p_1 x + p_2 y + p_3), \qquad mz = p(q_1 x + q_2 y + q_3),$$
$$nz = p(r_1 x + r_2 y + r_3).$$

Dans le cas où P a seulement un déplacement à d. d., il ne faut considérer dans la sphère T que les rayons situés dans un même plan, le plan tangent à la surface que décrit T ; les trois cosinus $\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$ sont liés alors par une équation de la forme $\frac{d\gamma}{dt} = f\frac{d\alpha}{dt} + g\frac{d\beta}{dt}$ ; en portant cette valeur de $\frac{d\gamma}{dt}$ dans l'équation précédente du plan Q, on voit que cette équation prend la forme $A\frac{d\alpha}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} = 0$, A et B étant des polynômes du premier degré en $x$, $y$ et $z$ ; cette équation représente donc tous les plans passant par la droite $A = 0$ et $B = 0$. Ainsi :

Dans un déplacement à t. d. d'un plan, ses associés passent par un point fixe ; dans un déplacement à d. d., les associés passent par une droite fixe.

Cette seconde partie est du reste une conséquence de la première ; les plans associés, pour un déplacement à d. d., passent en effet par le point fixe qui appartient à tous les plans associés dans le déplacement à t. d. De plus, les plans associés contiennent respectivement les droites du plan P qui représentent les vitesses de ce plan dans les mouvements à u. d. ; or, dans le cas d'un mouvement à d. d., ces vitesses passent par un même point (45) qui est le point de contact de P avec son enveloppe ; ce second point appartient donc aussi à tous les plans associés, lesquels, ayant ainsi deux points communs, passent par une même droite.

**68.** Soit H le point par lequel passent tous les plans associés Q dans le déplacement à t. d. du plan P ; ces plans associés coupent P suivant les vitesses de P (60) ; or, à trois rayons perpendiculaires de la sphère T correspondent trois vitesses conjuguées de P, lesquelles sont dirigées (49) suivant les trois côtés d'un triangle réciproque par rapport à une ellipse imaginaire : nous appellerons également conjugués les trois plans associés Q qui correspondent à ces trois rayons perpendiculaires de la sphère T ; le trièdre formé par ces trois plans coupe donc le plan P suivant le triangle réciproque dont nous venons de parler ; on en conclut que ces trois plans sont trois plans diamétraux conjugués d'un cône imaginaire du second degré ou, ce qui revient au même, d'un ellipsoïde réel. En particulier, les trois plans principaux de ce cône sont trois plans associés conjugués formant un trièdre trirectangle. Nous savons que le triangle formé par trois vitesses conjuguées est réciproque par rapport à l'ellipse imaginaire dont l'équation est (52) :

$$(p_1x+p_2y+p_3)^2+(q_1x+q_2y+q_3)^2+(r_1x+r_2y+r_3)^2=0. \quad (1)$$

Cette ellipse est la base du cône de sommet H.

**69.** Si nous transportons l'origine des coordonnées en H, les axes restant parallèles à eux-mêmes, l'équation du plan Q devient (66) :

$$\frac{dp}{dt}z=p\left(\frac{da}{dt}x+\frac{db}{dt}y\right).$$

Élevons en H une perpendiculaire à ce plan et sur cette per-

pendiculaire prenons une longueur $HN = q$ ; les coordonnées du point N sont, en posant $\Delta = \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]}$ :

$$x = \frac{pq}{\Delta}\frac{da}{dt}, \quad y = \frac{qp}{\Delta}\frac{db}{dt}, \quad z = -\frac{q}{\Delta}\frac{dp}{dt};$$

mais on a (66) $q = \Delta$ ; d'où l'on tire :

$$x = p\frac{da}{dt}, \quad y = p\frac{db}{dt}, \quad z = -\frac{dp}{dt}.$$

Remplaçons $da$, $db$ et $dp$ par leurs valeurs en fonction de $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ (67), il vient :

$$x = p\left(p_1\frac{d\alpha}{dt} + q_1\frac{d\beta}{dt} + r_1\frac{d\gamma}{dt}\right), \quad y = p\left(p_2\frac{d\alpha}{dt} + q_2\frac{d\beta}{dt} + r_2\frac{d\gamma}{dt}\right),$$
$$z = -\left(l\frac{d\alpha}{dt} + m\frac{d\beta}{dt} + n\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Quand le point T décrit la sphère $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = dt^2$, le point N $(xyz)$, d'après les relations précédentes, décrit une surface homographique, c'est-à-dire un ellipsoïde E de centre H. Trois diamètres conjugués de cet ellipsoïde correspondent à trois rayons perpendiculaires de la sphère et sont perpendiculaires à trois plans Q conjugués.

On obtient l'équation de l'ellipsoïde E en tirant $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$ des trois équations précédentes et en portant leurs valeurs dans l'équation $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 1$ ; on a ainsi l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{p} & q_1 & r_1 \\ \frac{y}{p} & q_2 & r_2 \\ z & m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x}{p} & r_1 & p_1 \\ \frac{y}{q} & r_2 & p_2 \\ z & n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x}{p} & p_1 & q_1 \\ \frac{y}{p} & p_2 & q_2 \\ z & l & m \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipsoïde E ; le premier membre de cette équation égalé à 0 est l'équation de son cône asymptote, lequel est imaginaire ; ce cône est évidemment supplémentaire du cône imaginaire dont la base est l'ellipse définie par l'équation

(1) (68). On peut, connaissant l'ellipsoïde E, en déduire toutes les vitesses du plan P dans son mouvement à t. d. En effet, si l'on prend un rayon HN de l'ellipsoïde, le plan perpendiculaire Q passant par H, est un plan associé dont le nombre $q$ est égal au rayon HN ; l'intersection de Q et de P est la direction de la vitesse de P et la grandeur $\omega$ de cette vitesse est donnée, ainsi que l'expression $\frac{dp}{dt}$, par les formules (60) :

$$q = \frac{\frac{dp}{dt}}{\cos \widehat{PQ}}, \qquad \operatorname{tg} \widehat{PQ} = \frac{p.\omega}{\frac{dp}{dt}}$$

qui peuvent s'écrire $\omega = \frac{q}{p} \sin \widehat{PQ}$ et $\frac{dp}{dt} = q. \cos \widehat{PQ}$.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que les nombres de trois plans associés conjugués satisfont aux relations connues qui existent entre trois rayons conjugués de l'ellipsoïde E.

Dans le cas particulier où le nombre $p$ passe par un maximum ou un minimum, on a $l = m = n = 0$ et $\frac{dp}{dt} = 0$ ; les formules précédentes montrent que dans ce cas tous les plans associés sont perpendiculaires au plan P ; on a de plus $q = p\omega$, de sorte que $q$ est proportionnel à $\omega$.

**70.** Prenons un système de plans numériques mobiles $(P_1 p_1)$, $(P_2 p_2)$, $(P_3 p_3)$... et leur résultant $(Pp)$ ; après un déplacement à u. d. infiniment petit $dt$ de T, ces plans sont devenus en position et en nombre $(P_1' p_1')$, $(P_2' p_2')$, $(P_3' p_3')$... et leur résultant $(P'p')$. Soient $(Q_1 q_1)$, $(Q_2 q_2)$... les plans associés de ces plans mobiles et $(Qq)$ le résultant des plans associés. Le plan $(P_1' p_1')$ est le résultant des plans $(P_1 p_1)$ et $(Q_1 q_1 dt)$ (60) ; donc le plan $(P'p')$, résultant des plans $(P_1' p_1')$..., est le résultant du plan $(Pp)$, résultant des plans $(P_1 p_1)$, et du plan $(Qqdt)$, résultant des plans $(Q_1 q_1 dt)$. Le plan $(Qq)$, étant en effet le résultant des plans $(Q_1 q_1)$, $(Qqdt)$, est aussi le résultant des plans $(Q_1 q_1 dt)$ (55). Donc, finalement, le plan $(Qq)$ est l'associé du plan $(Pp)$ ; ainsi le plan associé $(Qq)$ du résultant est le résultant des plans associés du système.

**71.** Supposons que ces mêmes plans $(P_1 p_1)$.... et leur résul-

tant aient un mouvement à t. d. ; soient $H_1$, $H_2$.... H les points de concours des plans associés de chacun de ces plans (67). Enfin, soient $E_1$, $E_2$... et E les ellipsoïdes de centres $H_1$, $H_2$... H dont nous avons donné précédemment la définition (69). Nous allons voir comment l'ellipsoïde E relatif au plan résultant $(P\rho)$ se déduit des autres ellipsoïdes $E_1$, $E_2$...

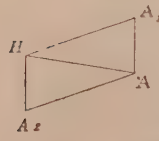
Pour un déplacement à u. d. on a les plans associés $(Q_1 q_1)$, $(Q_2 q_2)$... et $(Qq)$, lesquels passent respectivement par les points $H_1$, $H_2$... et H ; on a aussi les rayons $q_1$, $q_2$... et $q$ des ellipsoïdes $E_1$, $E_2$... et E, lesquels rayons sont perpendiculaires en $H_1$, $H_2$... H aux plans associés (69). Remarquons d'abord que les ellipsoïdes, respectivement homographiques à la sphère de centre T et de rayon $dt$ (69) sont homographiques entre eux ; les rayons $q_1, q_2 \ldots q$, correspondant à un même rayon de la sphère T, sont des rayons homologues. Nous allons montrer que le rayon $q$ est la résultante de translation des autres rayons $q_1, q_2 \ldots$ Soit, en effet, $(Rr)$ le plan résultant des deux premiers plans $(Q_1 q_1)$ et $(Q_2 q_2)$ : menons par le point H des perpendiculaires aux plans $Q_1$, $Q_2$ et R et sur ces perpendiculaires portons en sens convenable, à partir du point H, des longueurs $HA_1$, $HA_2$ et HA respectivement égales à $q_1 q_2$ et $r$. Les équations qui expriment que $(Rr)$ est le résultant de $(Q_1 q_1)$ et $(Q_2 q_2)$ (54) :

$$\frac{\sin \widehat{RQ_1}}{q_2} = \frac{\sin \widehat{RQ_2}}{q_1} = \frac{\sin \widehat{Q_1 Q_2}}{r}$$

peuvent s'écrire :

$$\frac{\sin AHA_1}{q_2} = \frac{\sin AHA_2}{q_1} = \frac{\sin A_1 HA_2}{r}$$

et sous cette forme elles expriment que HA est la résultante de $HA_1$ et $HA_2$. Ce raisonnement s'étend évidemment de proche en proche à un nombre quelconque de plans numériques ; d'où il résulte bien que le rayon $q$ est la résultante de translation des rayons $q_1, q_2 \ldots$




Ainsi, un système de rayons homologues des ellipsoïdes $E_1 E_2 \ldots$ a pour résultante de translation en H le rayon homologue de

l'ellipsoïde E; pour cette raison, nous dirons que l'ellipsoïde E est l'ellipsoïde résultant de translation en H des ellipsoïdes homographiques $E_1$, $E_2$... Cette question se rattache à la théorie de la composition des ellipsoïdes homographiques, laquelle sera exposée ultérieurement.

Nous voyons ainsi comment l'ellipsoïde E se déduit des ellipsoïdes $E_1$, $E_2$...; remarquons de plus que E est déterminé lorsqu'on connaît trois de ses rayons conjugués, lesquels sont les résultantes de translation de trois systèmes de rayons conjugués des ellipsoïdes $E_1$, $E_2$... Cet ellipsoïde E étant ainsi connu, on en déduit, pour chaque déplacement à u. d. du plan résultant $(Pp)$, le plan associé $(Qq)$ et la vitesse du plan P ainsi que la valeur de $\frac{dp}{dt}$ (69).

Dans le cas d'un mouvement à d. d. des plans $(P_1p_1)$..., leurs plans associés passent respectivement par les droites $H_1O_1$...., $O_1$ étant le point où le plan P touche son enveloppe (57); les rayons de l'ellipsoïde $E_1$, perpendiculaires aux plans associés, sont dès lors perpendiculaires à la droite $H_1O_1$ et donnent une section plane de l'ellipsoïde, c'est-à-dire une ellipse; on en conclut immédiatement que l'ellipse relative au résultant $(Pp)$ est l'ellipse résultante de translation des ellipses homographiques relatives aux plans $(P_1p_1)$, $(P_2p_2)$...

Ces ellipses homographiques correspondent à un grand cercle de la sphère T.

# NOTE

# SUR LES TUFS ET LES TOURBES

## DE LASNEZ, PRÈS DE NANCY[1]

Par M. FLICHE

PROFESSEUR A L'ÉCOLE FORESTIÈRE, A NANCY

Depuis l'époque à laquelle j'ai fait à la Société des sciences une communication préliminaire[2] sur les observations que nous avions été à même de faire, M. Bleicher et moi, sur les tufs et les tourbes de Lasnez, j'ai achevé l'étude des objets que nous avions recueillis.

En outre, une nouvelle fouille nous a mis à même de nous rendre compte plus complètement de la structure du terrain, de faire surtout quelques récoltes en dessous du lit de tourbe que nous avions signalé. Il est donc possible de rédiger sur ces intéressants dépôts un travail définitif, d'autant plus qu'on ne peut prévoir l'époque à laquelle ils pourraient être de nouveau mis à nu.

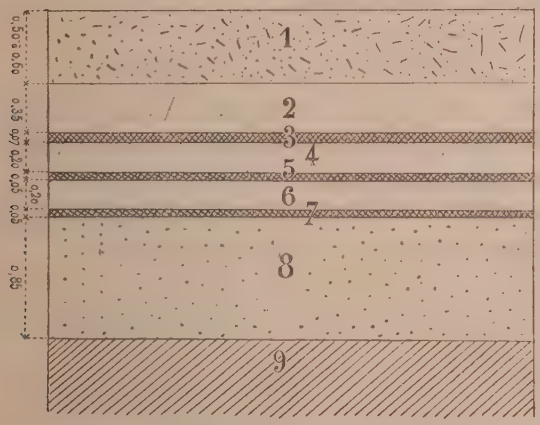
Notre confrère M. de Montjoie, sur la propriété duquel se faisaient les travaux qui ont traversé les tourbes et les tufs en question, a mis le plus grand empressement à faciliter nos études; il nous a aidés de son assistance pour les récoltes de débris d'animaux et de végétaux. Je suis heureux de lui adresser ici nos plus cordiaux remerciements.

Le château de Lasnez, auprès duquel se trouvent les tufs et les tourbes qui feront l'objet de cette étude, est situé, à proximité de Nancy, sur la commune de Villers, sur le flanc d'une petite vallée

1. Communication faite à la Société des sciences de Nancy.
2. *Bull. Soc. sc.*, série II, tome IX, 1888, p. XIV.

qui vient aboutir à la vallée de la Meurthe ; il est à proximité du grand massif forestier de la Haye. Des travaux de drainage profond, exécutés un peu au-dessus du château, amenèrent en 1887 le creusement d'un fossé vertical tranchant dans le sens de la pente les couches superficielles du sol, sur une épaisseur de plus de $2^{m},30$. Le fond à peu près horizontal de ce fossé était à une altitude d'environ 255 mètres, soit 56 mètres au-dessus du niveau actuel de la Meurthe au pont de Tomblaine.

La coupe figurant ci-dessous a été relevée par M. Bleicher. Elle montre que sous une épaisseur de terre végétale de 50 à 60 centimètres on rencontre des tufs qui ne sont pas continus, mais bien coupés horizontalement à trois niveaux différents par un




(Échelle : 2 centimètres pour mètre.)

1. Terre végétale.
2. Tuf pulvérulent et en rognons.
3. Sol végétal.
4. Tuf.
5. Sol végétal.
6. Tuf.
7. Sol végétal.
8. Tuf plus ou moins mélangé de tourbe.
9. Tourbe.

ancien sol végétal. En dessous des tufs on a rencontré de la tourbe qui n'a point été complètement fouillée. C'est dans cette tranchée qu'ont été recueillis tous les objets dont nous avons parlé dans la communication rappelée en tête de ce travail.

Plus tard, une nouvelle tranchée parallèle à la première fut ouverte à 18 mètres de celle-ci et en dessous d'elle par rapport à la pente générale du vallon.

La surface du sol présente une très forte dénivellation entre les deux tranchées. La conséquence de cette disposition du ter-

rain fut qu'on ne rencontra pas les tufs supérieurs, ni les sols qui les coupent. En dessous d'une couche de terre végétale d'épaisseur à peu près égale à celle de la couche coupée par la tranchée supérieure, on entra immédiatement dans le tuf n° 8. En dessous de lui, la couche de tourbe, d'allures moins régulières d'ailleurs que supérieurement, présentant du tuf en mélange, a été coupée dans toute son épaisseur et on a vu qu'elle repose sur un tuf dont l'épaisseur n'a pu être déterminée, puisqu'il a été fouillé seulement à la superficie.

La tourbe, de même que les tufs, soit supérieurs, soit inférieurs, renferme de nombreux fossiles végétaux et animaux qui vont être étudiés successivement en partant de la surface du sol et en arrivant jusqu'aux tufs inférieurs.

### Faune et flore des tufs supérieurs.

Nous n'y avons à peu près rencontré aucune trace de l'homme; nous ne pouvons citer que des rayures bien peu caractéristiques sur des os longs de mammifères.

Mammifères. — Nous avons trouvé une molaire supérieure de cheval et des débris d'os longs de grands herbivores.

Mollusques. — Ils sont représentés par des débris de coquilles; aucun de ceux que nous avons trouvés n'a permis une détermination certaine.

Végétaux. — Ils ont été conservés à l'état d'empreintes souvent très nombreuses; les monocotylédones y sont communs. Mais les empreintes de feuilles de tiges aériennes et de rhizomes sont si fragmentaires, qu'on ne peut faire de déterminations certaines; il est facile de voir cependant que les *Carex* des stations très humides et des graminées ayant de semblables exigences y sont largement représentés; parmi les dernières, il semble même qu'on puisse rapporter une empreinte de rhizome au *Phragmites vulgaris Trin.*

Les dicotylédones sont représentées presque exclusivement par le hêtre (*Fagus sylvatica L.*), dont les feuilles ont laissé des empreintes extrêmement abondantes.

Avec lui on rencontre peut-être le noisetier (*Corylus avellana L.*), certainement la bourdaine (*Rhamnus frangula L.*) dont

nous avons trouvé une seule feuille ; un érable, probablement le sycomore (*Acer pseudo-platanus L. ?*) dont on rencontre quelques fragments de feuilles. Cette rareté des arbrisseaux et des arbustes n'a d'ailleurs rien d'étonnant, la forêt ayant été presque exclusivement constituée par le hêtre dont le couvert épais entrave presque toute végétation, surtout celle des végétaux cotylédonés au-dessous de lui-même.

### Faune et flore de la tourbe.

L'homme a laissé des traces de son existence, non seulement par les os d'animaux domestiques qui ont été rencontrés, mais par du charbon et par deux fragments de silex que nous figurons ci-dessous. Ils sont de très petite taille et n'ont pu servir probable-

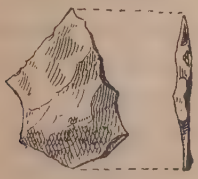


Fig. 1.

Fig. 2.

**Fig. 1. Silex blanc grisâtre, calcédonieux. — Fig. 2. Silex de même provenance, mais patiné en noir. — Fig. 1. Taillé à grands éclats, tranchant sur les bords. — Fig. 2. Rien de particulier, également tranchant sur les bords.**

ment à aucun usage, mais l'un d'eux, le n° 2, présente un petit bulbe de percussion bien marqué ; de plus, ils appartiennent l'un et l'autre à une variété qui n'existe pas dans les environs, et leur présence à Lasnez suppose par suite un transport effectué par l'homme.

Mammifères. — Nous avons trouvé une molaire de bœuf commun (*Bos taurus L.*) et une arrière-molaire de la mâchoire inférieure du cheval commun (*Equus Caballus L.*).

Insectes. — *Plateumaris* (*Donacia*) *discolor* (?) *Panzer*. Une élytre a été déterminée par M. Mathieu, ancien sous-directeur de l'École forestière, lequel a bien voulu me remettre la note suivante : « Espèce très commune dans les marais, surtout ceux de montagne, sur les *Carex*, les *Eriophorum ;* ne se rencontre généralement que sur les plantes des eaux stagnantes ; tandis que

les vraies Donacies vivent le plus souvent sur les végétaux qui bordent les eaux courantes. »

Mollusques. — Les coquilles de ces animaux sont communes. M. Bleicher a déterminé les espèces suivantes : *Cyclostoma elegans Drap.; Clausilia laminata Turt.; Clausilia Sp.; Hyalinia nitens*; H. Cellaria; Cionella lubrica; Helix nemoralis L.; H. hortensis Müll.; H. rotundata Müll.; H. lapicida L.; Carychium minimum Müll.; Bythinella Sp.; Lymnæa truncatula Beck.*, forme alpine*; *Pisidium amnicum Jen.*

La plupart de ces espèces sont aujourd'hui encore communes aux environs de Nancy dans les stations similaires. Quelques-unes, dont les noms sont marqués d'un astérisque, sont devenues rares. L'ensemble indique une station humide avec un climat humide également et à tout le moins frais.

Végétaux. — Les végétaux sont représentés par les organes eux-mêmes plus ou moins altérés, dont on voit non seulement la forme extérieure, mais encore la structure. Nous y avons trouvé deux mousses :

*Neckera complanata (L.) Br. et Sch.; Hypnum cuspidatum L.*

Les dicotylédonés ont laissé des traces importantes de leur existence; nous avons rencontré :

*Alnus glutinosa L.*, bois en fragments parfois assez volumineux et en abondance; feuilles (?).

*Betula alba L.*, probablement à raison de la station la var. *pubescens;* bois et surtout écorce commune.

*Salix cinerea L.* (?), feuilles.

*Corylus avellana L.*, bois et surtout en abondance des fruits.

*Ulmus effusa Willd.?* Un beau morceau d'écorce appartient certainement à un orme; la détermination spécifique est plus douteuse. On peut affirmer cependant qu'il ne s'agit pas de l'*U. montana* dont l'écorce est plus fine et moins épaisse, mais bien de l'*U. campestris* ou de l'*U. effusa,* plus probablement de cette dernière chez laquelle les écailles du rhytidome sont plus courtes, les côtes mieux marquées; les écailles se détachent aussi plus facilement, d'une façon qui rappelle ce qu'on observe chez les pins; tandis que les écorces épaisses de l'orme champêtre se détachent par petits fragments.

*Cerasus padus* (*L.*) *D. C.* Un noyau de la grosseur de ceux du *C. padus* et du *C. mahaleb* qui se ressemblent beaucoup sous ce rapport ; la forme plus globuleuse de l'organe, la surface qui, autant que l'état de conservation permet de le voir, était sculptée comme celle de *C. padus*, militent en faveur de cette espèce.

*Cornus sanguinea L.* Un noyau.

*Sambucus nigra L.* De très nombreuses nucules démontrent la grande abondance de cet arbuste à Lasnez au moment où se déposait la tourbe.

*Galium palustre L.* Cette espèce est représentée par quatre fruits.

**Flore des tufs inférieurs à la tourbe.**

*Pinus sylvestris L.* Des empreintes malheureusement imparfaites, le moulage de deux fragments d'aiguilles, rendent la présence d'un pin très probable, sans qu'en présence de l'imperfection de ces traces on puisse être affirmatif; quant à l'espèce, à raison de la longueur des feuilles, ce n'aurait pu être que le *P. sylvestris* ou le *P. montana ;* plus probablement le premier.

*Populus tremula L.* L'empreinte d'un fragment de feuille se rapporte certainement à cette espèce.

*Salix cinerea L.* Quelques fragments de feuilles paraissent se rapporter à cette espèce.

*S. nigricans Fries. var. antiqua.*

Il est assez difficile de déterminer sûrement, sur une empreinte, une feuille de ce saule si variable. Il me semble cependant que celle qui est représentée figure 3 et qui est presque entière lui appartient ; on ne pourrait guère la rapporter en dehors de lui qu'au *S. cinerea* ou au *S. caprœa*. Or les nervures sont moins régulières et surtout moins rapprochées qu'elles ne le sont chez le saule cendré, les premières sont moins ondulées qu'elles ne le sont chez ses feuilles et surtout chez celles du second qui les montre aussi irrégulières et dichotomes vers le sommet ; l'empreinte est en outre très nette sans trace de pubescence, enfin la forme très aiguë et régulière sans renflement

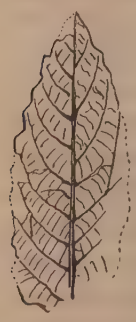


Fig. 3.

au-dessus du milieu ne se rencontre guère chez le *S. cinerea*, non plus que les dents très prononcées ; il y a sous tous ces rapports complète analogie avec un échantillon de *S. nigricans* que je possède provenant des bords du Rhin en Alsace.

Les nervures de base plus rapprochées qu'elles ne sont généralement, semblent justifier la création d'une variété spéciale.

*S. vagans Anders.* L'empreinte d'une feuille presque entière et celle d'un grand fragment d'une autre appartiennent à un saule ; comme on peut le voir par les figures 4 et 4', il possédait de très

Fig. 4. Fig. 4'. Fig. 5. Fig. 5'.

petites feuilles ; parmi les espèces vivant aujourd'hui en Lorraine, les *S. aurita* et *S. repens* sont les seules qui pourraient s'en rapprocher sous ce rapport, mais elles en diffèrent d'ailleurs à tous égards, notamment par la nervation.

Après examen approfondi de ces empreintes et sous les réserves que comporte la détermination, sur quelques empreintes incomplètes, d'espèces aussi variables que les saules auxquels se rapportent ces feuilles, il me semble que l'on peut avec une assez grande certitude les considérer comme provenant du *S. vagans Anders.* (*S. livida Wahl.*)

J'ai pu examiner de nombreux échantillons des herbiers du Muséum et de la Faculté des Sciences de Nancy. Ceux en particulier de Smölande contenus dans ce dernier présentent avec les feuilles fossiles les plus étroites affinités, comme on en peut juger par les dessins que je donne de deux feuilles, figures 5 et 5'. La taille assez variable mais souvent très faible de part et d'autre, la forme générale dont on peut dire la même chose : les deux moitiés généralement plus ou moins inégales, les bords du limbe entiers, la longueur du pétiole, le mode d'attache du limbe sur celui-ci, enfin la nervation sont identiques. Le *S. phylicifolia*

auquel j'avais songé d'abord a dans les petites formes de l'analogie avec le fossile, mais les feuilles sont rarement aussi petites et les bords du limbe ne sont presque jamais entiers.

Le saule de Lasnez ne peut être non plus le *S. myrtilloides* déjà signalé en Suisse dans des gisements semblables ; ce dernier avec quelques analogies, a les feuilles généralement plus grandes, à limbe plus arrondi à la base, plus symétrique, à nervures secondaires plus redressées, s'approchant plus franchement du bord avant de se diviser par dichotomie. Le *S. vagans* est une forme du Nord de l'Europe qui présente comme dernière station méridionale et occidentale Pfohren, près de Donaueschingen[1]. Il n'a point encore été signalé à l'état fossile.

De l'examen auquel nous venons de nous livrer, il résulte que les flores présentent des ensembles plus importants que les faunes à raison du nombre des espèces qui les constituent et de celui des échantillons par lesquels plusieurs d'entre elles sont représentées.

C'est donc sur elles que doit se porter d'abord notre attention pour en saisir les caractères, les comparer entre elles et avec la végétation existant aujourd'hui dans la même localité ; voir dans quelle mesure les résultats que fournit leur étude s'accordent avec ceux obtenus pour des dépôts similaires. Les faunes nous serviront cependant utilement pour corroborer les conclusions auxquelles nous conduira l'étude des plantes, pour dater le terrain qui les renferme.

Un premier fait s'impose à notre attention, c'est la différence que les trois flores étudiées présentent entre elles d'abord, puis avec celle qui se rencontre vivant aujourd'hui dans la même localité. La plus élevée, la plus récente par conséquent, est caractérisée essentiellement par une végétation forestière constituée presque exclusivement par du hêtre ; les autres arbres, les arbustes sont très rares. Ceux qui ont été observés : bourdaines, noisetier, érable et le hêtre lui-même, se retrouvent dans le canton du grand massif de Haye qui finit derrière Lasnez ; la différence n'en est pas moins très considérable entre la forêt actuelle et la forêt ancienne dont les tufs nous ont transmis les restes.

1. Doll, *Flora des Grossherzogthums Baden*, II, p. 499.

Le hêtre est devenu peu abondant, le massif est essentiellement constitué par le charme, les chênes rouvre et pédonculé, auxquels se joignent quantité d'essences accessoires, d'arbustes et d'arbrisseaux.

La flore de la tourbe présente des caractères très différents de ceux de la première et qui s'écartent encore plus de ce qu'on observe aujourd'hui à Lasnez et aux environs ; pas de hêtres, de chênes, de charmes ; les seuls arbres sont un orme qui n'est pas l'*U. montana* de la forêt actuelle, mais bien l'*U. campestris* ou plus probablement l'*U. effusa* qu'on rencontre encore en Lorraine mais, pour le département de Meurthe-et-Moselle, seulement au bord de la Moselle, à la Flie, aux environs de Liverdun ; l'aune commun, existant encore dans les environs, mais beaucoup moins abondant qu'au moment où se formait la tourbe ; le bouleau, qui n'existe plus dans les environs à l'état spontané ; probablement le cerisier à grappe qui est dans les mêmes conditions ; les arbustes étaient assez abondants, les uns sans caractère bien accusé à l'endroit du climat, du sol, tels sont les noisetiers, cornouilliers sanguins, saules cendrés. Un autre, au contraire, le sureau noir, est remarquable parce que, ami des stations fraîches, de spontanéité douteuse dans la plaine et les collines de Lorraine où il n'est pas très abondant, il jouait évidemment un rôle considérable dans la végétation arbustive de Lasnez au moment où se formait la tourbe.

L'unique cotylédone herbacée, *Galium palustre*, est une plante de marais. Quant aux acotylédones cellulaires, elles sont représentées par deux mousses dont l'une, *Neckera complanata*, vivant sur la tige des végétaux ligneux, est encore commune dans les environs, tandis que l'autre, recherchant les endroits très humides, ne se rencontre plus aujourd'hui dans les environs de Nancy qu'aux abords de l'étang de Champigneulles.

L'ensemble de la flore indique, on le voit, une station très humide, probablement aussi un climat froid et humide ; l'étendue du bassin tourbeux étant très restreinte, il n'y aurait eu aucune raison pour que le combustible végétal n'eût pas conservé des restes d'une flore très différente, au cas où celle-ci aurait existé dans les environs immédiats. D'ailleurs, quelques-unes des es-

pèces vivant aujourd'hui à Lasnez, le chêne pédonculé en particulier, ne redoutent nullement les stations humides, même un peu marécageuses.

Les résultats fournis par l'étude des végétaux sont remarquablement corroborés par la constitution de la faune malacologique et aussi, dans la mesure restreinte qu'elle comporte, de la faune entomologique. Ce sont, en effet, les espèces ou les variétés des stations fraîches qui l'emportent et quelques-unes ont émigré exactement comme l'ont fait les plantes.

Quant à la flore des tufs inférieurs, elle ne rappelle en rien celle des tufs supérieurs, elle se rattache à celle de la tourbe, mais elle est plus pauvre et, en faisant même abstraction de la présence douteuse du pin sylvestre, elle présente un caractère boréal plus prononcé, marqué par la présence de deux saules dont l'un, *S. nigricans*, n'existe plus en Lorraine que dans les Hautes-Vosges où il est très rare, et l'autre, *S. vagans*, est une espèce plus septentrionale, qui aujourd'hui, comme cela a été dit plus haut, ne s'avance pas plus loin que les environs de Donaueschingen, à une latitude légèrement plus basse que celle de Nancy, mais à une altitude au moins double de celle de Lasnez et dans une station se rattachant à un massif montagneux important.

Une première conclusion s'impose à l'esprit lorsqu'on réfléchit à la diversité des roches rencontrées par les fouilles de Lasnez, à celle des flores et des faunes dont elles ont conservé les débris, c'est qu'entre le dépôt des tufs inférieurs et l'état actuel des choses, il y a eu dans la localité des changements importants dans le climat et le débit des sources ; les tufs correspondant à des périodes de pluies abondantes, supérieures à ce qu'elles sont aujourd'hui, la tourbe est due à une humidité moindre quoique encore considérable. Les tufs supérieurs sont interrompus par les remarquables sols végétaux dont il a été question plus haut qui correspondent à des périodes pendant lesquelles le climat était au moins aussi sec qu'aujourd'hui, puisque maintenant aussi les eaux de Lasnez ne laissent plus déposer de tufs. En un mot, nous sommes en présence d'alternances de climats tantôt humides, tantôt plus secs exactement semblables à celles que l'étude des tourbières de la péninsule scandinave a révélées à M. Blytt.

Il est intéressant de savoir à quelle date géologique se sont passés les événements que nous venons de signaler; la tourbe nous fournit, pour arriver à ce but, des renseignements parfaitement certains; les quelques silex qu'elle renferme montrent que l'homme existait dans la contrée au moment où elle s'est formée, qu'en outre il se servait encore, sinon exclusivement, au moins principalement de la pierre pour confectionner armes et outils. Les fragments rencontrés sont trop petits pour que sur eux on puisse rapporter le dépôt à l'époque paléolithique ou à l'époque néolithique; mais à côté d'eux, on trouve des ossements d'animaux domestiques, cheval, bœuf surtout, qui amènent à conclure en faveur de la dernière. Le tuf inférieur qui est en si parfaite continuité avec la tourbe doit appartenir à un âge antérieur de la même époque, ou peut-être à la partie tout à fait supérieure du paléolithique. Quant aux tufs supérieurs, ils se sont certainement déposés au moins à la fin de la période néolithique; étant donnée même leur épaisseur, il est probable qu'ils ont continué à se former pendant l'âge du bronze, peut-être à une époque postérieure.

Si on rapproche ces dépôts de Lasnez de ceux soit du commencement de l'époque actuelle, soit des temps quaternaires déjà étudiés en Lorraine, on constate qu'ils présentent pour ce pays le très grand intérêt de fournir pour la première fois d'importants renseignements sur les modifications qu'ont subies climat, faune et flore pendant la période qui, de la pierre polie ou des derniers temps de la pierre éclatée, s'étend jusqu'à nos jours.

Jusqu'à présent nous étions seulement renseignés, par des charbons trouvés dans des retranchements préhistoriques ou provenant de tombeaux, sur l'état forestier du pays, depuis le commencement de l'époque du bronze jusqu'à l'époque à laquelle l'homme est intervenu pour modifier puissamment par ses exploitations la constitution de la forêt, en présence de laquelle il se trouvait. Ces charbons avaient montré que sur les plateaux et leurs pentes de raccordement, le hêtre avait été l'essence non seulement dominante mais presque exclusive. On peut constater quelle importante confirmation les tufs apportent aux résultats ainsi obtenus, confirmation d'autant plus remarquable que les feuilles se sont

conservées au hasard de leur chute, tandis que pour les charbons on pouvait invoquer, à la rigueur, un choix, bien plus probable d'ailleurs, fait par les populations primitives dans le bois qu'elles employaient pour servir de combustible.

Quant à la flore de la tourbe, elle présente, on l'a vu, la plus complète dissemblance et avec celle des tufs et avec celle qui couvre aujourd'hui les environs de Lasnez ; par contre, elle offre la plus étroite analogie avec celle qui a été signalée à la base des puissants dépôts tourbeux des vallées de la Seine et de quelques-uns de ses affluents notamment ; ce ne sont pas toujours les mêmes espèces, mais de part et d'autre on en rencontre qui caractérisent un climat un peu plus froid que celui de nos jours, dans les mêmes pays. On constate aussi l'absence d'autres espèces auxquelles ce climat aurait été contraire.

On peut remarquer que l'âge des dépôts est le même dans les deux contrées et que c'est la première fois qu'une flore semblable a été rencontrée et étudiée dans les plaines et les coteaux de la Lorraine.

Quant à la présence, en dessous de la tourbe, d'une flore de caractère encore plus boréal, elle n'a pas été observée jusqu'à présent, au moins d'une façon nette, en-dessous des tourbes de Champagne et de la Basse-Bourgogne ; mais ce qui a été vu à Lasnez concorde avec les résultats des observations faites en Suède, en Danemark, en Angleterre, en Allemagne et en Suisse surtout par M. Nathorst, et aussi pour ce dernier pays par M. Schröter.

Dans la plupart des cas, les végétaux ont laissé leurs traces dans des argiles ou des marnes supportant la tourbe ; on a trouvé cependant des tufs de la même époque à Schüssenried ; c'est avec cette station allemande que celle de Lasnez présente sous ce rapport la plus grande analogie. On remarque aussi que le caractère boréal dans cette dernière est un peu moins prononcé. Cela peut tenir à l'insuffisance des documents, mais aussi à ce qu'au moment où vivaient les saules à Lasnez cette localité devait avoir, comme c'est encore le cas aujourd'hui, à raison de sa situation, un climat moins froid que celui des stations étudiées hors de France.

On a trouvé dans les terrains quaternaires de Lorraine, à Jar-

ville près de Nancy et à Bois-l'Abbé près d'Épinal, des lignites contenant de très nombreux restes déterminables de végétaux; le caractère de la flore, dont ils permettent de se faire une idée très exacte, est tout à fait boréal.

Quelle relation existe-t-il entre cette flore et celle de Lasnez? Les espèces sont très différentes; les conifères, par exemple, dont l'existence est douteuse dans les tufs, abondent et sont représentés par les formes les plus boréales dans les lignites ; en outre, il est visible de par la position des deux dépôts qu'ils ne sont pas contemporains.

Tous les terrains rencontrés à Lasnez sont récents, le tuf inférieur lui-même appartient à l'époque actuelle, tout au plus au passage de l'époque quaternaire à celle-ci, tandis que les lignites de Jarville et de Bois-l'Abbé sont surmontés par les énormes dépôts de cailloux et de sable à *Elephas primigenius,* probablement antérieurs aux temps pendant lesquels a vécu ce proboscidien, dans tous les cas remontant au plus tard au moment de son apparition. On pourrait donc admettre tout au plus que la flore des tufs inférieurs et des tourbes de Lasnez marquerait le dernier terme de celle dont l'existence nous est révélée pour la première fois dans les lignites, flore qui aurait été en se modifiant progressivement. Nous ne pensons pas que cette opinion soit admissible. On trouve en effet en Lorraine à Mousson, à la Sauvage et à la Perle aux environs de Reims, des tufs très fossilifères, qui, par leurs allures géologiques, par leur flore, se montrent évidemment contemporains de ceux qui ont été étudiés aux environs de Paris à la Celle et à Resson. Or ces derniers sont d'âge connu, déterminé par la stratigraphie et la paléontologie animale ; ils appartiennent à la fin de la période de l'*E. primigenius.* La flore dont ils ont conservé les restes indique un climat plus humide, plus égal, mais cependant légèrement plus chaud que celui d'aujourd'hui.

La conséquence à tirer de ces constatations c'est que les tufs en question doivent s'intercaler entre les lignites et les tufs inférieurs de Lasnez auxquels ils ont probablement passé : la flore perdant en même temps les espèces de régions plus chaudes et en recevant d'autres qui revenaient du Nord ou des montagnes où

elles avaient dû se réfugier pendant le relèvement de la température correspondant aux dépôts des tufs de la Celle, Resson, la Perle, la Sauvage et Mousson. Voici quelle nous paraît avoir été la succession des terrains et des climats en Lorraine :

1° Lignites de Jarville et de Bois-l'Abbé, climat très froid ;

2° Tufs de Mousson, la Sauvage, climat doux, égal et très humide ;

3° Tufs inférieurs de Lasnez et tourbes supportées par eux, climat froid ;

4° Tufs supérieurs de Lasnez, climat très semblable au climat actuel, avec alternatives de périodes plus sèches ou plus humides.

On voit que nous arrivons, pour la Lorraine, à la même conclusion que Heer pour la Suisse : deux époques glaciaires, la première plus prononcée que la seconde, séparées par une période de réchauffement.

Cette conception nous paraît d'accord avec les faits ; elle explique, mieux que toute autre, les phénomènes de la vie végétale, au moins dans le Nord-Est de la France depuis le début de l'époque quaternaire jusqu'à nos jours.

SUR UN

# ÉLECTROMÈTRE ASTATIQUE

POUVANT SERVIR COMME

# WATTMÈTRE

**Par MM. R. BLONDLOT et P. CURIE**

Cet instrument est une transformation de l'électromètre à quadrants de Sir W. Thomson. L'aiguille, au lieu d'être en forme de 8, est constituée par deux demi-cercles $A_1$ et $A_2$ (fig. 1) soutenus par une petite pièce d'ébonite ; ces deux demi-cercles, solidaires dans leur mouvement, sont indépendants au point de vue électrique. Les secteurs sont remplacés par des plateaux fixes $P_1$ et $P_2$ ayant également la forme de demi-cercles.

Fig. 1.

En désignant par $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ les potentiels respectifs de $A_1$, $A_2$, $P_1$, $P_2$, par $\alpha$ l'angle de déviation de l'aiguille sous l'action des forces électriques équilibrées par le fil de suspension, on a

$$\alpha = K(V_1 - V_2)(V_3 - V_4),$$

à la seule condition que l'angle des deux fentes diamétrales ne soit pas très petit. K est une constante, égale à deux fois le quotient de la capacité de l'aiguille pour l'unité d'angle par le couple de torsion du fil de suspension pour l'unité d'angle.

L'avantage de cet instrument réside, non dans la substitution de demi-cercles aux secteurs de l'électromètre à quadrants, mais dans le fait que l'aiguille mobile est formée d'un système de deux conducteurs à des potentiels distincts, en tous points semblable au système des conducteurs fixes : l'appareil est ainsi rendu plus symétrique, et cette symétrie se retrouve dans la formule qui donne les déviations de l'instrument [1].

M. Gouy a montré [2] récemment que, dans l'électromètre à quadrants, il y a lieu de tenir compte d'un couple directeur électrique qui, indépendamment du fil de torsion, tend à ramener l'aiguille dans la position d'équilibre symétrique ; aussi, dans certains cas, la formule usuelle de l'électromètre n'est plus applicable.

Dans notre instrument, il n'y a pas de couple directeur électrique et la formule donnée plus haut est rigoureusement vraie.

L'appareil a été construit par M. Ducretet. L'aiguille (voir fig. 2), très légère, est découpée dans une feuille d'aluminium très mince ($\frac{1}{40}$ de millimètre) qui reçoit une rigidité assez forte d'un gaufrage préalable, donnant une surface ondulée analogue à celle des

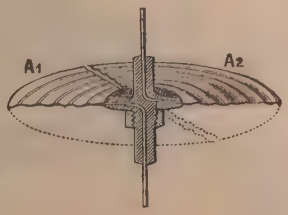



Fig 2.

tambours des baromètres anéroïdes. Les deux moitiés $A_1$ et $A_2$ de l'aiguille sont fixées l'une à l'autre à l'aide d'une pièce centrale en ébonite ; deux tiges d'aluminium dirigées suivant l'axe, l'une

1. Le principe de l'appareil a été donné par l'un de nous, M. Curie, dans le journal *la Lumière électrique*, numéro du 23 octobre 1886.

2. Gouy, *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 97. 1888.

au-dessus, l'autre au-dessous, communiquent respectivement avec les deux moitiés de l'aiguille.

La position d'équilibre de l'aiguille est déterminée par deux fils de platine très fins *ff* (fig. 3), tendus en dessus et en dessous de l'aiguille (comme dans le galvanomètre Deprez-d'Arsonval) ;

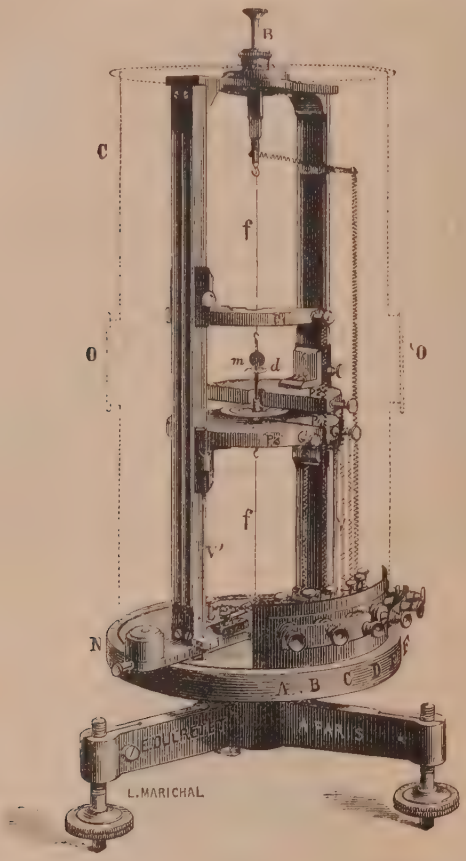



Fig. 3.

ces deux fils servent à la fois à équilibrer par leur torsion les actions électriques et à établir les communications électriques respectivement avec les deux demi-disques $A_1$ et $A_2$. Le fil employé, d'un diamètre de $\frac{1}{30}$ de millimètre, est fourni par la maison Gaiffe

de Paris ; il faut avoir soin de le recuire préalablement au moyen d'une petite flamme. Le fil supérieur est attaché à son extrémité supérieure à un crochet que l'on peut élever ou abaisser à volonté à l'aide de la vis de rappel B ; le fil intérieur est tendu par un ressort plat.

Le crochet supérieur peut être tourné par rapport à l'instrument, à l'aide d'un tambour molleté, qui entoure la vis B. Un miroir *m* est fixé à la tige de l'aiguille. Le petit disque métallique *d* protège le miroir contre des actions électriques perturbatrices provenant des demi-cercles fixes.

Les demi-cercles fixes sont au nombre de quatre, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, deux en dessus et deux en dessous ; le plateau $P_3$ a été représenté soulevé, afin de laisser voir la disposition de l'aiguille. Ces plateaux sont des aimants, et les oscillations de l'aiguille se trouvent amorties par les courants d'induction qui naissent dans sa masse sous les influences magnétiques.

En général, les plateaux situés l'un au-dessus de l'autre, $P_1$ et $P_3$ d'une part, $P_2$ et $P_4$ d'autre part, sont rendus solidaires au point de vue électrique.

Les quatre plateaux, qui sont supportés par les deux colonnes V et V', sont pourvus de tous les moyens de réglage.

Tout l'appareil est renfermé dans une boîte cylindrique en laiton, munie de deux fenêtres O et O', placées à la hauteur du miroir, et munies de glace.

Pour que l'instrument soit sensible, il est nécessaire que le centre de gravité de l'aiguille soit sur l'axe et que cet axe soit bien vertical.

Pour se servir de l'électromètre, on commence par le caler à l'aide des trois vis du pied et du niveau N, puis on tourne le tambour placé à la partie supérieure, jusqu'à ce que le miroir soit sensiblement parallèle à l'une des fenêtres : la fente de l'aiguille est alors perpendiculaire à celle des demi-cercles fixes. Après avoir disposé le plus exactement possible les demi-cercles fixes, on achève le réglage de la manière suivante : on fait communiquer tous les demi-cercles fixes ensemble et avec la terre, puis on établit une différence de potentiel quelconque entre les deux moitiés de l'aiguille ; en général celle-ci dévie un peu : on déplace ensuite

l'un des plateaux $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, jusqu'à ce que cette déviation ne se produise plus. L'appareil est alors prêt à fonctionner.

Ses usages sont les suivants :

1° Il peut fonctionner comme un *électromètre ordinaire* muni d'une pile de charge. Il suffit, par exemple, de mettre les pôles de la pile de charge respectivement en communication avec chacun des demi-cercles de l'aiguille ; les déviations sont alors *rigoureusement* proportionnelles aux différences de potentiel que l'on établit entre les plateaux.

2° Il peut servir par la méthode idiostatique, en unissant respectivement les deux paires de plateaux aux deux moitiés de l'aiguille ; on a alors

$$V_1 = V_3,\ V_2 = V_4 \text{ et } \alpha = K(V_1 - V_2)^2.$$

3° Il peut servir comme *wattmètre*. L'instrument donne, en effet, le produit de deux différences de potentiel. On peut prendre pour l'une d'elles celle qui existe entre les deux bornes qui terminent le segment de circuit dans lequel on veut évaluer l'énergie électrique ; on prendra pour l'autre la différence des potentiels aux extrémités d'une résistance connue, intercalée dans le circuit général, différence qui est proportionnelle à l'intensité du courant.

Les déviations sont ainsi proportionnelles à chaque instant à l'énergie du segment du courant.

Lorsqu'il s'agit de courants alternatifs, cet instrument est le *seul* qui permette d'évaluer rigoureusement le travail dépensé. On sait en effet que, dans ce cas, on ne peut mesurer séparément la force électromotrice et l'intensité du courant pour calculer le travail. Les wattmètres fondés sur l'action des courants sur les courants ne donnent pas non plus rigoureusement le travail. Enfin la méthode électrométrique de M. Potier[1], de beaucoup la meilleure de celles qui ont été indiquées, peut être faussée par l'insuffisance de la formule usuelle de l'électromètre[2].

1. Potier, *Journal de Physique*, 1re série, t. X, p. 445. 1881.

2. Lebedœr. *Lumière électrique*. 1888.

Dans le cas des courants alternatifs, il est nécessaire que la résistance comme intercalée dans le circuit général soit dépourvue de self-induction.

4° Enfin l'instrument peut être employé comme électromètre différentiel, en utilisant la faculté de séparer, au point de vue électrique, les plateaux supérieurs des inférieurs. Cette disposition permet de comparer les résistances par une méthode plus rapide que celle du pont de Thomson, et où l'influence des contacts n'existe pas.

Le Tableau ci-dessous contient les résultats d'une série d'expériences faites dans le but de contrôler la formule de l'instrument : on se servait de la méthode idiostatique indiquée plus haut, et, par suite, la déviation D devait être proportionnelle au carré de la différence de potentiel E, autrement dit, $\frac{D}{E^2}$ devait être constant.

La première colonne contient les forces électromotrices E ; on les obtenait à l'aide d'éléments Gouy à l'oxyde de mercure ; on employait deux, quatre, six, etc., de ces éléments, dont on avait préalablement constaté l'égalité. On a pris pour unité la force électromotrice d'un de ces éléments.

La deuxième colonne contient les déviations D réduites en degrés, minutes et secondes ; la troisième colonne les quotients $\frac{D}{E^2}$, à un facteur constant près.

| E. | D. | $\frac{D}{E^2}$. |
|---|---|---|
| 4 . . . . . | 17′52″ | 67,15 |
| 6 . . . . . | 39′72″ | 67,02 |
| 8 . . . . . | 1°11′30″ | 67,01 |
| 10 . . . . . | 1°51′45″ | 67,05 |
| 12 . . . . . | 2°41′06″ | 67,08 |
| 14 . . . . . | 3°39′03″ | 67,26 |
| 16 . . . . . | 4°46′45″ | 67,20 |
| 18 . . . . . | 6°03′05″ | 67,23 |
| 20 . . . . . | 7°25′45″ | 66,72 |
| 22 . . . . . | 8°52′ | 66,00 |
| 24 . . . . . | 10°27′ | 66,27 |

On voit que ces derniers quotients sont bien près d'être constants, même pour des angles dépassant de beaucoup ceux dont on se sert ordinairement dans la méthode par réflexion.

L'instrument peut également être construit en employant des

demi-cylindres concentriques au lieu de demi-cercles, tant pour l'aiguille que pour les armatures fixes. C'est sous cette forme qu'il a été exécuté par l'un de nous (M. Blondlot, avec l'aide obligeante de M. A. Perot).

On pourrait encore réaliser l'instrument en conservant les secteurs de l'électromètre à quadrant et en prenant pour aiguille un système analogue au système fixe. L'aiguille serait alors constituée par un cercle métallique divisé en quatre secteurs unis deux à deux au point de vue électrique. Ce dispositif, d'une construction plus difficile, présenterait certains avantages : dans l'électromètre à demi-cercles les actions électriques se réduisent à une force et à un couple ; le couple seul est mesuré par la torsion du fil ; la force située dans le plan de l'aiguille produirait un effet perturbateur en déplaçant latéralement l'aiguille si celle-ci n'était maintenue par la tension du fil. Dans le dispositif à secteurs, les actions électriques produiraient seulement un couple et la force latérale serait nulle par raison de symétrie.

# COMMUNICATIONS

DE

M. A. HALLER

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

## I

### Sur la cyanacétophénone, l'orthométhylcyanatophénone et l'éther orthotoluylacétique. — Méthode générale de synthèse d'acides β acétoniques de la série aromatique[1].

Dans une communication précédente[2], j'ai démontré que la cyanacétophénone renferme un groupe méthylène compris entre Co et CAz et qu'elle était susceptible de fournir des dérivés métalliques de la formule $C^6H^5.Co.CHM.CAz$.

Grâce à cette constitution, elle est également capable de donner naissance à un dérivé diazoïque analogue à ceux qu'on obtient avec l'éther acétoacétique. Ce dérivé se prépare en ajoutant une solution alcoolique de cyanacétophénone neutralisée par de la soude à la quantité théorique de chlorure de diazobenzol, recueillant le précipité jaune, le lavant et le faisant cristalliser dans l'alcool.

Ce corps se présente sous la forme de longues aiguilles soyeuses et jaunes, insolubles dans l'eau, peu solubles dans l'alcool froid, mais solubles dans l'alcool bouillant et les alcalis. Il fond à 135°7 (carr.). On peut le représenter par la formule $C^6H^5.CO.CH\begin{matrix}/\,Az^2.C^6H^5\\ \backslash\,CAz\end{matrix}$ et l'appeler *diazobenzolcyanacétophone orthomé-*

1. Communication faite dans la séance du 3 juin 1889.
2. Comptes rendus, t. CIV, p. 104.

*thylcyanacétophénone.* $C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.CH^2.CAz\end{cases}$. L'éther orthotoluylcyanacétique se décompose, ainsi que je l'ai fait voir [1], en acide carbonique, alcool et orthométhylcyanacétophénone, quand on le fait bouillir avec de l'eau. Il se produit en même temps un corps résineux, brunâtre et incristallisable. L'acétone se dépose au sein de l'eau en aiguilles qu'on purifie par cristallisation dans l'éther. On obtient ainsi de gros cristaux blancs très nets et ayant l'aspect de prismes rhombiques avec modifications sur les angles. Ce corps fond à 74°4 (carr.), est soluble dans l'alcool et les alcalis, insoluble dans l'éther de pétrole. Il possède une constitution analogue à celle de son homologue inférieur et se comporte d'ailleurs comme celui-ci vis-à-vis des différents agents qu'on met en présence. Ainsi quand on traite sa solution dans la soude par du chlorure de diazobenzol, on obtient un dérivé azoïque ressemblant à celui décrit plus haut

$$C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.CH\,Na\,CAz\end{cases} + C^6H^5Az^2Cl = NaH + C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.CH\begin{cases}Az^2.C^6H^5\\CAz\end{cases}\end{cases}$$

Ce corps se présente sous la forme de petits cristaux à base rhombique, de couleur jaune, solubles dans l'alcool bouillant, dans l'éther et dans les alcalis. Il fournit avec la soude une combinaison qui cristallise en aiguilles soyeuses ou en paillettes jaunes. Il fond à 124°7 (carr.) et constitue le *diazobenzolorthométhylcyanacétophénone.*

*Action de l'alcool chlorhydrique sur l'orthométhylcyanacétophénone.* — Lorsqu'on abandonne à elle-même et dans une enceinte froide, une solution de la cyanacétone dans de l'alcool absolu saturé d'acide chlorhydrique, il se dépose au bout de quelque temps de fines aiguilles d'un chlorhydrate d'éther imidé.

$$C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.CH^2.CAz\end{cases} + C^2H^5OH + HCl = C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.CH^2.C\begin{cases}AzH\,HCl\\OC^2H^5\end{cases}\end{cases}.$$

Ce chlorhydrate broyé avec de l'ammoniaque aqueuse fournit l'éther imidé qu'on fait cristalliser dans l'alcool. On obtient ainsi

1. Comptes rendus, t. CVIII, p. 104.

de beaux cristaux ayant la forme de prismes ou de tables rectangulaires fondant à 116°3 (carr.). Ce corps, qu'on peut considérer comme l'éther *orthotoluylacétimidoéthylique* est soluble dans l'alcool et dans l'éther, insoluble dans les alcalis. Quand on le fait bouillir avec de l'alcool aqueux légèrement acidulé d'HCl, il ne tarde pas à se décomposer en chlorhydrate d'ammoniaque et en éther *orthotoluylacétique,* homologue supérieur de l'éther benzoylacétique.

Pour isoler ce nouvel éther, il suffit d'étendre la solution d'eau, de recueillir les gouttelettes huileuses qui se séparent et de les dessécher. Cet éther s'est formé en vertu de la réaction :

$$C^6H^4\begin{cases}CH^3\\CO.\,CH\begin{cases}AzH\,HCl\\O\,C^2H^5\end{cases}\end{cases} + H^2O = C^6H^4\begin{cases}CH^2\\CO.\,CH^2.\,CO^2C^2H^5\end{cases} + AzH^4Cl.$$

Il se présente sous la forme d'un liquide huileux, légèrement coloré, possédant une odeur semblable à celle de l'éther benzoylacétique. Il est un peu soluble dans les alcalis et donne avec les sels fariques une coloration violette.

Cet éther, ayant une constitution semblable à celle de son homologue inférieur, se prêtera sans aucun doute aux mêmes synthèses que lui.

Les recherches que nous venons d'exposer et celles relatives aux éthers benzoyl et orthotoluylcyanacétiques nous autorisent maintenant à généraliser ces réactions et à les considérer comme pouvant servir à la préparation de toute une série d'acides β acétoniques de la série aromatique. Aussi allons-nous donner sous forme d'équations la série de réactions par lesquelles il est nécessaire de passer pour arriver à ce but.

1) $$R.CO.Cl + CHNa\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases} = R\,CO.\,CH\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases} + NaCl$$

2) $$R.CO.CH\begin{cases}CAz^2\\CO^2C^2H^5\end{cases} + H^2O = R.CO.CH^2CAz + CO^2 + C^2H^5OH$$

2) $$R.CO.CH^2CAz + C^2H^5OH + HCl = R.CO.CH^2.C\begin{cases}AzHHCl\\O\,C^2H^5\end{cases}$$

4) $$R.CO.CH^2.C\begin{cases}AzH\,HCl\\O\,C^2H^5\end{cases} + H^2O = R.CO.CH^2.CO^2C^2H^5 + AzH^4Cl$$

## II

### Sur différents bornylphényluréthanes gauches, droites et racémiques [1].

Dans une communication présentée à l'Académie des sciences [2], j'ai fait voir que l'isocamphol gauche possédait un pouvoir rotatoire qui variait avec la nature du dissolvant employé, tandis que le bornéol $\alpha$ gauche conservait son pouvoir rotatoire normal dans ces mêmes dissolvants.

On sait d'autre part que les isocamphols ($\beta$) chauffés seuls, ou avec des acides, ou encore avec du sodium, se transforment en camphols $\alpha$ dont l'action sur la lumière polarisée se manifeste dans un sens opposé.

Cette instabilité des isobornéols rend l'étude de leurs dérivés fort difficile, car pour peu qu'on opère à une température un peu élevée, on s'expose à avoir un mélange d'isomères.

Par les nombreux dérivés des bornéols, nous en avons donc choisi un dont la préparation n'exige pas le concours de la chaleur. C'est le bornylphényluréthane décrit par M. R. Leuckart [3].

Ce composé se prépare en mélangeant molécules égales de camphol et d'isocyanate de phényle.

$$C^{10}H^{17}OH + CO.Az.C^6H^5 = CO\begin{matrix}\diagup AzH\,C^6H^5\\ \diagdown OC^{10}H^{17}\end{matrix}$$

La réaction se fait peu à peu à froid et on obtient finalement une masse dure et compacte qu'il suffit de faire cristalliser dans l'alcool.

Les bornylphényluréthanes se présentent en général sous la forme de fines aiguilles blanches, solubles dans l'éther, la benzine, le toluène, peu solubles dans l'alcool froid et dans l'éther de pétrole.

Le point de fusion varie suivant la nature du bornéol employé.

On a préparé, par la méthode décrite, le dérivé correspondant

1. Communication faite dans la séance du 15 novembre 1889.
2. Comptes rendus, t. CIX, p.
3. *Deut. Chem. Ger.*, t. XX, p. 115.

aux deux camphols α droit et gauche, ainsi que celui qui se rattache à l'isocamphol gauche.

Le racémique dérivé de ces deux bornéols α, et que nous désignerons par racémique $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\alpha}$, a été obtenu par mélange des uréthanes droite et gauche α, et aussi par action directe de l'isocyanate et phényle sur le camphol racémique αα.

Les uréthanes dérivées des camphols racémiques $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\beta}$ et $\overset{-}{\alpha}\overset{+}{\beta}$ (mélanges de camphol droit α et de camphol gauche β, d'une part, et de camphol gauche α et de camphol droit β d'autre part), ont également été préparées directement, mais l'une d'elles a aussi été obtenue en mélangeant l'uréthane droite α avec la gauche β.

Les pouvoirs rotatoires de tous ces corps ont été pris avec des dissolutions dans le toluène (un litre = 1/5 de molécule). Nous avons de plus pris les pouvoirs rotatoires des camphylphénylurétanes gauches α et β avec des solutions alcooliques. Cet essai a eu pour but de nous assurer si le dissolvant exerçait une influence sur le pouvoir rotatoire.

| | Point de fusion. | P. r. moléculaire. |
|---|---|---|
| | — | — |
| I. — Bornylphényluréthane droite α. . . . . | 137.75 | $(\alpha)_0 = +\ 31.14$ |
| II. — Bornylphényluréthane gauche α . . . . | 137.25 | $(\alpha)_0 = -\ 34.31$ |
| III. — Bornylphényluréthane racémique $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\alpha}$ obtenue par action directe du carbonile sur le camphol rac. . . . . | 140.00 | » |
| La même, préparée en mélangeant I et II. . | 140.00 | » |
| IV. — Isobornylphényluréthane gauche (β). . . | 130.50 | $(\alpha)_0 = -\ 56.77$ |
| V. — Bornylphényluréthane obtenue en partant d'un camphol racémique $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\beta}$ . . . . | 133.00 | $(\alpha)_0 = -\ 7.50$ |
| VI. — Bornylphényluréthane obtenue en partant d'un camphol racémique $\overset{-}{\alpha}\overset{+}{\beta}$. . . . . | 132.60 | $(\alpha)_0 = +\ 7.32$ |
| VII. — Bornylphényluréthane obtenue en mélangeant I et IV. . . . . | 130.00 | $(\alpha)_0 = -\ 10.37$ |

En solution alcoolique les deux uréthanes II et IV ont respectivement les pouvoirs rotatoires $(\alpha)_0 = +\ 34{,}49$ et $(\alpha)_0 = -\ 56{,}77$, c'est-à-dire les mêmes valeurs qu'en solution toluique. Les déterminations qui précèdent montrent : 1° que les bornylphényluréthanes obtenues avec les camphols gauche et droit ont même point de fusion et au signe près, même pouvoir rotatoire moléculaire.

2° Que l'isobornylphényluréthane gauche possède un point de

fusion un peu plus bas que son isomère $\alpha$, mais que par contre son pouvoir rotatoire est beaucoup plus élevé.

3° Que les uréthanes $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\beta}$ et $\overset{-}{\alpha}\overset{+}{\beta}$ ont même point de fusion et, bien que dérivant de camphols inactifs, exercent une action sur la lumière polarisée. Cette action qui au signe près est la même pour les deux, est une conséquence des propriétés de l'uréthane d'isocamphol droit ou gauche qui entre dans la constitution de ces corps.

4° Que l'uréthane obtenue en mélangeant parties égales du dérivé I et du dérivé IV, uréthane qui devrait avoir un pouvoir rotatoire moléculaire égal à celui que possède le corps V, possède au contraire un pouvoir rotatoire de 3° de plus. — Cette différence peut tenir à ce que dans l'action du carbonile sur le camphol racémique $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\beta}$, une certaine quantité d'isocamphol gauche a échappé à l'isocyanate de phényle.

5° Que la nature du dissolvant ne modifie pas le pouvoir rotatoire du dérivé gauche $\beta$, comme le fait arrive avec le camphol lui-même.

# MODIFICATIONS A APPORTER

## AUX PROCÉDÉS GÉNÉRAUX

# D'ANALYSE ORGANIQUE

## DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS [1]

**Par M. A. HELD**

PROFESSEUR A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHARMACIE DE NANCY

### Dosage du carbone et de l'hydrogène.

J'ai eu l'occasion, dans le cours d'un travail récent, de faire remarquer les difficultés que j'ai rencontrées dans l'analyse de certains corps organiques que j'avais obtenus, en suivant les méthodes usuelles.

Les procédés classiques m'ont donné des résultats absolument discordants sur lesquels je ne pouvais faire aucun fond pour la détermination de la composition des corps analysés.

Ces corps renferment, en général, une proportion assez considérable d'azote.

Lorsqu'on tente de les brûler en présence de l'oxyde de cuivre, on observe presque toujours que la substance, au moment où elle commence à subir l'action de la chaleur, se volatilise en minime quantité. Pour le reste, la décomposition a lieu sur place et donne naissance à une matière visqueuse qui englobe facilement l'oxyde de cuivre, et qui, par élévation de température, donne

1. Communication faite dans la séance du 1er février 1889.

un charbon que l'oxygène seul arrive à brûler complètement quoique avec difficulté.

J'ai constaté que :

1° La combustion en présence de l'oxyde de cuivre *seul* est incomplète ;

2° Un courant d'air ou même d'oxygène dirigé dans le tube à combustion vers la fin de l'opération, n'arrive pas, ou très difficilement, à brûler tout le carbone ;

3° Dans certains cas, il est indispensable d'opérer la combustion dans un courant d'oxygène depuis le début de l'analyse, afin de brûler progressivement toutes les parties volatilisées de la substance.

Dans ces conditions, le cuivre métallique, disposé à la partie antérieure du tube à combustion, pour décomposer les vapeurs nitreuses qui se forment en grande quantité dans l'oxydation de corps aussi riches en azote, ne pouvait être employé : il eût été rapidement oxydé.

J'ai essayé de lui substituer la tournure d'argent, mais sans succès : une colonne de 25 centimètres d'argent métallique pour un tube à combustion d'un mètre n'arrivait pas à décomposer les vapeurs nitreuses qui, absorbées par le tube à potasse, augmentaient de 1 à 2 p. 100 la proportion de carbone dosé.

J'ai remplacé l'argent en tournure par de la toile métallique d'argent fin, à grains serrés, roulée en spirale et occupant tout le diamètre du tube à analyse, sans plus de succès. Toujours, j'ai constaté la production de vapeurs nitreuses qui coloraient le tube à ponce sulfurique et le tube de Liebig renfermant la solution de potasse.

J'ai eu alors l'idée de préparer de l'argent encore plus divisé, et je suis arrivé à ce résultat en imbibant d'une solution concentrée de nitrate d'argent, de la pierre ponce en petits fragments, préalablement chauffée avec de l'acide sulfurique concentré, puis calcinée.

Après l'avoir imprégnée de la solution de nitrate d'argent, je l'ai désséchée à l'étuve, puis calcinée dans un tube de verre traversé par un courant d'air lent, jusqu'à ce qu'il ne soit plus dégagé trace de vapeurs nitreuses, en évitant cependant de pousser la

température au point de faire fondre l'argent disséminé dans la pierre ponce.

C'est en remplaçant par ce produit ainsi préparé la tournure de cuivre ou d'argent que préconisent les traités d'analyse chimique, que j'ai pu arriver à opérer une combustion dans un courant d'oxygène, en réduisant au minimum la production de vapeurs nitreuses pour des corps qui, comme certains d'entre eux, renferment 18 à 25 p. 100 d'azote. Malgré cela, je n'ai pu toujours éviter la production de ces vapeurs, et, il m'est arrivé souvent d'obtenir pour le carbone des nombres supérieurs de 0,20 à 0,30 p. 100 à la quantité théorique.

## Dosage de l'azote.

J'ai fait remarquer la discordance des résultats que m'avaient donnés, pour le dosage de l'azote, les méthodes de Peligot à la chaux sodée et de Kjeldahl, consistant dans l'emploi d'acide sulfurique fumant pour la destruction de la matière organique.

Comme dans le dosage du carbone, j'obtenais pour le même corps des différences considérables d'une opération à l'autre, et cela sans raison apparente.

Je me décidais alors à recourir à la méthode de Dumas, modifiée par Dupré, consistant à recueillir, dans une lessive concentrée de potasse, l'azote gazeux provenant de la combustion de la subsance analysée en présence d'oxyde de cuivre et après avoir balayé tout l'appareil par un courant d'acide carbonique pur.

Dans ces conditions, j'ai encore obtenu des nombres trop faibles, quoique j'aie fait passer pendant toute la durée de la combustion un courant d'acide carbonique pour amener au contact de l'oxyde de cuivre porté au rouge, les vapeurs émises par le corps analysé.

J'ai pu me convaincre que ce résultat était dû à ce que le charbon provenant de la destruction de la substance retenait énergiquement de l'azote, et comme le contact avec l'oxyde de cuivre n'était jamais intime, une certaine quantité d'azote échappait à la combustion, ce qui donnait des nombres trop faibles.

J'ai été ramené dans ces conditions à achever la combustion

de la matière carbonisée au moyen d'un courant d'oxygène pur, produit dans le tube à combustion même, après le départ de tout l'azote gazeux que provoquait l'oxydation par l'oxyde de cuivre.

Je n'ai du reste fait qu'appliquer à un cas particulier la méthode de dosage simultané du carbone, de l'hydrogène et de l'azote de V. Meyer et J. Jannasch[1].

Le procédé qui m'a donné de bons résultats est le suivant :

La combustion s'opère à la manière ordinaire dans un tube rempli d'oxyde du cuivre et contenant, à la partie antérieure, du cuivre métallique, sur une longueur d'environ 25 centimètres.

A la partie postérieure du tube, on loge, entre deux tampons d'amiante, 10 à 15 grammes d'un mélange de 100 parties permanganate de potasse et 100 parties de bichromate de potasse fondu, le tout bien pulvérisé et desséché. Il faut avoir soin de ne pas trop tasser ce mélange dans le fond du tube, sous peine d'obstruction.

Le tampon d'amiante qui sépare ce mélange de la colonne d'oxyde de cuivre doit avoir 3 ou 4 centimètres de long et n'être pas serré.

Le tube garni est mis en communication avec le flacon à potasse de Dupré et balayé par un courant d'acide carbonique pur pour en chasser tout l'air. On cesse le courant quand le gaz recueilli est entièrement absorbé par la potasse.

On conduit alors la combustion comme à l'ordinaire, en ayant soin de ne pas chauffer la partie du tube qui renferme le mélange destiné à fournir l'oxygène.

Il n'y a pas d'inconvénient à continuer le courant d'acide carbonique pendant la combustion, à la condition de la modérer.

Quand le volume du gaz recueilli n'augmente plus, on chauffe la partie postérieure du tube renfermant le mélange oxydant. Il se dégage instantanément de l'oxygène pur qui achève la combustion du charbon non brûlé par l'oxyde de cuivre et qui met en liberté l'azote retenu par ce charbon.

On cesse de chauffer le mélange oxydant et on arrête ainsi le dégagement d'oxygène, au moment où tout le cuivre réduit par la combustion de la substance est réoxydé.

1. *Liebigs Annal.*, A 223, p. 375. 1886.

Il suffit alors de balayer l'appareil par un courant modéré d'acide carbonique pour entraîner les dernières portions de l'azote restant dans le tube. La minime quantité d'oxygène qui peut s'y trouver encore est retenue par le cuivre métallique logé à la partie antérieure du tube.

J'ai constaté que, dans ces conditions, si l'on a eu soin de modérer le dégagement de l'oxygène et le balayage par l'acide carbonique, le gaz recueilli ne renfermait pas de trace de bioxyde d'azote. Pour éviter, dans le gaz qu'on recueille, la présence d'une petite quantité d'air, il est bon d'y faire 2 ou 3 fois le vide et d'y laisser rentrer chaque fois de l'acide carbonique pur avant de commencer à chauffer.

L'acide carbonique que j'emploie pour le balayage de l'appareil, s'obtient par l'action de l'acide chlorhydrique dilué sur des fragments de marbre de la dimension d'un gros pois. Mais, il est nécessaire, pour obtenir un gaz absolument absorbable par la potasse, de faire bouillir préalablement les fragments de marbre en présence d'une certaine quantité d'eau pendant 2 ou 3 heures dans un appareil à reflux. On laisse refroidir à l'abri de l'air et on conserve pour l'usage sous l'eau bouillie.

L'acide chlorhydrique, de son côté, étendu de 4 fois son poids d'eau, est soumis à l'ébullition dans un appareil à reflux pendant au moins deux heures, et on le laisse refroidir après y avoir projeté quelques fragments de marbre qui provoquent un dégagement d'acide carbonique destiné à empêcher le contact de l'air pendant le refroidissement.

En prenant ces précautions, on obtient un gaz sinon complètement absorbable par la potasse, du moins suffisamment pour ne pas influencer d'une manière sensible les résultats de l'analyse.

Je préfère pour la préparation de l'acide carbonique ce procédé à l'emploi du carbonate de manganèse ou de magnésie, ou du carbonate de soude, car, en employant pour le générateur à acide carbonique la disposition recommandée par M. Dupré, on peut, à tout moment de l'opération, diriger un courant de ce gaz dans le tube à combustion et l'arrêter à volonté sans avoir à craindre d'absorption.

# SOCIÉTÉS CORRESPONDANTES.

Amiens. — Société linnéenne du Nord de la France.
— Société industrielle d'Amiens.
Amsterdam. — Koninklijke Akademie der Wetenschappen (Académie royale des sciences).
Angers. — Société d'études scientifiques d'Angers.
— Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.
Bale. — Naturforschende Gesellschaft in Basel.
Batavia. — Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen (Société des arts et sciences de Batavia).
Berlin. — Kœnigl. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
— Deutsche Geologische Gesellschaft.
Berne. — Naturforschende Gesellschaft in Bern.
— Schweizerische naturforschende Gesellschaft.
Besançon. — Société d'émulation du Doubs.
— Société de médecine de Besançon.
Béziers. — Société d'études des sciences naturelles de Béziers.
Bonn. — Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande und Westfalens.
Bordeaux. — Société linnéenne de Bordeaux.
— Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Boston. — American Academy of Arts and Sciences de Boston (Massachusetts).
Breslau. — Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Brunn. — Naturforschender Verein in Brünn.
Bruxelles. — Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Caen. — Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen.
— Société linnéenne de Normandie.
Chemnitz (Saxe). — Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Chemnitz.
Cherbourg. — Société nationale des sciences naturelles de Cherbourg.
Coire. — Naturforschende Gesellschaft Graubündens.
Colmar. — Société d'histoire naturelle de Colmar.
Copenhague. — Kongelige danske videnskaberne selskab Kjöbenhavn (Société royale danoise des sciences).
Cracovie. — Académie des sciences.
Danzig. — Naturforschende Gesellschaft in Danzig.
Davenport. — Academy of Natural Sciences of Davenport (Iova).
Dublin. — Royal geological Society of Ireland.
Épinal. — Société d'émulation du département des Vosges.
Frauenfeld — Thurgauische naturforschende Gesellschaft.
Fribourg. — Naturforschende Gesellschaft zu Freiburg im Breisgau (grand-duché de Bade).

GIESSEN. — Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
GŒRLITZ (Silésie). — Naturforschende Gesellschaft zu Gœrlitz.
GUÉRET. — Société des sciences naturelles et archéologiques de la Creuse.
HAMBOURG-ALTONA. — Wissenschaftlicher Verein von Hamburg-Altona.
HARLEM. — Hollandsche Maatschapij der Wetenschappen (Société hollandaise des sciences).
HAVRE (LE). — Société des arts agricoles et horticoles du Havre.
HELSINGFORS. — Vetenskaps-Societetens af Finska (Société des sciences de la Finlande).
— Sällskapets pro Faunâ et Florâ fennicâ (Société pour la faune et la flore de la Finlande).
INSPRUCK. — Ferdinandeum für Tyrol und Vorarlberg.
KIEW. — Société des Naturalistes attachée à l'Université impériale de Saint-Wladimir, à Kiew.
LAUSANNE. — Société vaudoise des sciences naturelles.
LEIPZIG. — Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig.
— Verein für Erdkunde.
LIÈGE. — Société géologique de Belgique.
— Société royale des sciences.
LILLE. — Société biologique du Nord de la France.
LISBONNE. — Academia real das sciencias de Lisboa.
LIVERPOOL. — Biological Society.
LONDRES. — Royal geological Society.
LUXEMBOURG. — Institut royal grand-ducal de Luxembourg (Section des sciences naturelles et mathématiques).
LYON. — Société linnéenne de Lyon.
— Société botanique de Lyon.
MANCHESTER. — Litterary and philosophical Society of Manchester.
MARSEILLE. — Société d'études des sciences naturelles de Marseille.
METZ. — Société d'histoire naturelle de Metz.
MEXICO. — Sociedad cientifica.
MONTAUBAN. — Académie des sciences, lettres et arts de Tarn-et-Garonne.
MONTBÉLIARD. — Société d'émulation de Montbéliard.
MONTPELLIER. — Académie des sciences et lettres de Montpellier (Section des sciences).
MONTRÉAL. — Society of natural history of Montreal (Canada).
MOSCOU. — Société impériale des naturalistes de Moscou.
MUNICH. — königl. Baierische Akademie der Wissenschaften (mathem. u. physik. Abth.).
MUNSTER. — Westfälischer Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst.
NANCY. — Académie de Stanislas.
— Société de médecine.
— Société de géographie de l'Est.
— Commission météorologique du département de Meurthe-et-Moselle.
NEUCHATEL. — Société des sciences naturelles de Neuchâtel (Suisse).
NIMES. — Société d'études des sciences naturelles de Nîmes.
OFFENBACH. — Verein für Naturkunde in Offenbach a/Main.
OSNABRÜCK. — Wissenschaftlicher Verein.
PARIS. — Association française pour l'avancement des sciences.
— Société des Jeunes Naturalistes.

Perpignan. — Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées-Orientales.
Philadelphie. — Akademy of natural sciences of Philadelphia (Pensylvanie).
Pise. — Società toscana di scienze naturali in Pisa.
Prague. — Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.
Presbourg. — Verein für Natur- und Heilkunde zu Pressburg.
Rio-de-Janeiro. — Observatoire impérial astronomique et météorologique.
— Museo Nacional.
Rome. — Accademia reale dei Lincei.
Rouen. — Société des Amis des sciences naturelles de Rouen.
Saint-Dié. — Société philomathique vosgienne de Saint-Dié.
Saint-Gall. — St. Gallische naturwissenschaftliche Gesellschaft.
Saint-Jean-d'Angély. — Société linnéenne de la Charente-Inférieure.
Saint-Louis. — Academy of sciences of Saint-Louis (Missouri).
Saint-Pétersbourg. — Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.
— Comité géologique. (Institut des Mines.)
San-Francisco. — Akademy of Sciences of California.
Stockholm. — Kong. Svenska Vetenskaps Akademie (Académie royale suédoise des sciences).
Tokyo. — Imperial University (Litterature College of Tokyo) [Japon].
Toulouse. — Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse.
— Société d'histoire naturelle de Toulouse.
— Société académique hispano-portugaise.
Tours. — Société d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département d'Indre-et-Loire.
Turin. — Accademia Reale delle Scienze.
Upsal. — Regia societas scientiarum Upsaliensis.
— Université d'Upsal.
Verdun. — Société philomathique de Verdun.
Versailles. — Société des sciences naturelles et médicales de Seine-et-Oise.
Vienne. — Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien (mathemat. u. wissenschaftliche Abth.).
— Kaiserl. Königl. naturhistorisches Hofmuseum.
— Kaiserl. Königl. zoologische und botanische Gesellschaft in Wien.
Vitry-le-François. — Société des sciences et arts de Vitry-le-François.
Washington (D. C. U. S. A.). — Smithsonian Institution.
— Bureau of Ethnology.
Wiesbaden. — Nassauischer Verein für Naturkunde.
Zagreb (Agram). — Societas historico-naturalis Croatica.
Zurich. — Naturforschende Gesellschaft in Zürich.

# OUVRAGES

## REÇUS PAR LA SOCIÉTÉ PENDANT L'ANNÉE 1889.

### I. — Publications périodiques et journaux.

Amiens. — Bulletin de la Société linnéenne du Nord de la France. 1888-1889, t. IX.
— Bulletin de la Société industrielle. T. XXVI, n° 6 ; t. XXVII, n^os 1, 2, 3.
Amsterdam. — Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie der Wetenschappen. 1889. D. V.
Angers. — Bulletin de la Société industrielle et agricole. 1887, 1^er, 2^e sem.; 1888, 1^er, 2^e sem.
— Bulletin de la Société d'études scientifiques. 1887, 17^e année.
Anvers. — Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. 4^e série, t. IV.
— Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique. N^os 17 à 21.
Batavia. — Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. 1875. D. 37, 38.
— Naturkundig Tijdschrift voor Neerlandisch-Indie. D. XLVIII.
Berlin. — Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Du 18 octobre 1888 au 25 juillet 1889 (Table).
Berne. — Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. 1887-1888, 71. Jahr.
— Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft. 1888, 1195-1214.
Besançon. — Société d'émulation du Doubs. 1888, 6^e série, 3^e vol.
Bonn. — Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preussischen Rheinlande und Westfalens. 1887, 2^es H.; 1888, 1^tes, 2^es H.
Bordeaux. — Actes de la Société linnéenne. 1887, t. I, liv. 4, 5, 6.
Breslau. — Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur. 1888, 66^er Jahresb.
Brunn. — Verhandlungen des naturforschenden Vereins. 1887. XXVI. B.
— Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereines. 1886.
Bruxelles. — Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1888, 3^e série; t. XIII, XIV, XV, XVI.
— Mémoires couronnés, in-8° ; t. XL, XLI, XLII.
— Mémoires couronnés, in-4°. 1888, t. XLIX.
— Annuaires de 1888 et 1889.
Caen. — Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres. 1887-1888.
— Bulletin de la Société linnéenne de Normandie. 1887-1888, 4^e série, 2^e vol.
Coire. — Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft. 1887-1888. XXXII. J.
Copenhague. — Oversigt over det Kongelige danske videnskaberne selskab. Avril 1888 à février 1889.

Cracovie. — Bulletin international de l'Académie des sciences. 1889, nos 1 à 9.

Davenport (Iowa). — Academy of natural sciences. 1884-1889, vol. 5. partie I.

Épinal. — Annales de la Société d'émulation des Vosges. 1889.

Fribourg. — Berichte der naturforschenden Gesellschaft. 1888. III. B.; 1888-1889. IV. B.

Giessen. — Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. 1889. XXVI. B.

Granville (Ohio). — Bulletin of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. IV, 1re et 2e parties.

Guéret. — Mémoires de la Société des sciences naturelles et archéologiques de la Creuse. 1889, t. II. 3e bulletin.

Harlem. — Archives néerlandaises. T. XXIII, liv. 2, 3, 4, 5.

Helsingfors. — Ofversigt Vetenskaps-Societens af Finska. 1887-1888, t. XXX.

— Acta Societatis scientiarum fennicæ, t. XVI.

Kieff. — Mémoires de la Société des naturalistes. 1889, t. X, liv. 1.

Lausanne. — Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. 99. Vol. XXIV.

Leipzig. — Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1888, I, II; 1889, I.

— Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1888. B. XIV, 10, 11, 12, 13; 1889. B. XV, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

— Mittheilungen des Vereins für Erdkunde. 1888.

Liège. — Annales de la Société géologique de Belgique. 1888, t. XIII, 2e liv.; t. XIV, 2e liv.; t. XV, 2e et 3e liv.; t. XVI.

Lille. — Revue biologique du Nord de la France, 1, 2, 3, 4.

Londres. — Royal geological Society. 1889, February. Vol. XLV, part. 1, 2, 3, 4. (List november 1889.)

Lons-le-Saulnier. — Mémoires de la Société d'émulation du Jura. 1888, 4e série, 4e vol.

Lyon. — Actes de la Société linnéenne. 1885, 1886, 1887.

— Bulletin de la Société botanique. 1885, 1886, 1887.

Manchester. — Proceedings Litterary and Philosophical Society. 1888, vol. XXXI.

Mexico. — Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique-magnétique central. T. I, 1888; t. II, 1889, 1, 2.

— Informes é documentos relativos a comercio interior y exterior, agricultura, mineria é industrias. 1889, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

— Memorias de la Sociedad cientifica Antonio Alzate. T. II, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Montauban. — Recueil de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Tarn-et-Garonne. T. IV, 1888.

Montbéliard. — Mémoires de la Société d'émulation. 1888, XIXe vol.

Moscou. — Bulletin de la Société impériale des naturalistes. 1888, 3, 4; 1889, 1.

Munich. — Abhandlungen der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften. 1888. B. LVI. — Recueil d'écrits de Joseph de Fraunhofer. — Un mémoire du Dr Paul Groth. — Un mémoire de M. Carl Marx von Bauernfeind; XVI. B. D. Abth.

— Sitzungsberichte der mathem.-physischen Classe. 1888, H. III; 1889, H. I, II.

Nancy. — Mémoires de la Société de médecine. 1887-1888.

— Mémoires de l'Académie de Stanislas. 1888.

NANCY. — Bulletin de la Société de géographie de l'Est. 1888, 4e trim.; 1889, 1er, 2e, 3e trim.

— Bulletin de la Commission météorologique de Meurthe-et-Moselle. 1888.

NAPLES. — Atti della Reale Accademia di scienze morali e politiche. 1889, vol. 23; Compte rendu des séances (janvier à décembre 1888).

NEUCHATEL. — Bulletin de la Société des sciences naturelles. 1888, t. XVI.

NEW-YORK. — Transactions of the Academy of Sciences. Vol. VIII, 1, 2, 3, 4.

NIMES. — Bulletin de la Société d'études des sciences naturelles. 1887; 1888; 1889, 1 à 3.

OSNABRUCK. — Jahresbericht des naturwissenschaftlichen Vereins. 1885 bis 1888.

PARIS. — Association française pour l'avancement des sciences. 1888, 17e session. 1re et 2e parties (Oran).

— Informations et documents divers, 53, 54, 56.

— Revue des travaux scientifiques. T. VIII, 6 à 12; t. IX, 1 à 5.

— Feuille des Jeunes naturalistes. Du n° 1 à 204; 219 à 231. — Catalogue de la bibliothèque, 5, 6, 7.

PHILADELPHIE. — Geological Survey of Pennsylvania. Museum catalogue, 3; atlas, part III, IV. H. H.

— Journal of the Academy of natural sciences. De mars 1888 à avril 1889.

PISE. — Atti della Societa toscana di Scienze naturali. 1889. Processi verbali, vol. VI (4 fasc.).

PRAGUE. — Sitzungsberichte der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1888.

— Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe. 1887-1888, VII F., 2 B.

RIO-DE-JANEIRO. — Revue de l'observatoire impérial astronomique et météorologique. 1889, 1 à 12.

— Archivos do Museu nacional. 1887, vol. VII.

ROME. — Atti dell' Accademia Reale dei Lincei. Vol. IV, 6 à 12; vol. V, 1er sem., 1 à 12; vol. V, 2e sem., 1 à 7.

ROUEN. — Bulletin de la Société des amis des sciences naturelles. 1888, 2e sem.

SAINT-DIÉ. — Bulletin de la Société philomathique vosgienne. 1888-1889.

SAINT-GALL. — St-Gallische naturwissenschaftliche Gesellschaft. 1886-1887.

SAINT-LOUIS (Missouri). — Academy of sciences. Vol. V, nos 1, 2, 1886-1888.

SAINT-PÉTERSBOURG. — Mémoires du Comité géologique. Vol. III, n° 4; vol. VIII, n° 1.

— Bulletin du Comité géologique. Vol. VII, 6, 7, 8, 9, 10; vol. VIII, 1 à 5. Suppl.

TOULOUSE. — Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres. 1888, t. X.

— Bulletin de la Société d'histoire naturelle. 1888, 2e, 3e, 4e trimestres.

— Bulletin de la Société académique hispano-portugaise. 1889, 1, 2.

TOURS. — Annales de la Société d'agriculture, sciences, arts et belles-lettres du département d'Indre-et-Loire. 1888, t. LXVIII.

TRENTON. — Journal of the Trenton natural history Society. Vol. II, n° 1, janvier 1889.

VIENNE. — Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. 1888, 54. B.

— Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. (3 classes.) 1888, janvier à juillet.

VIENNE. — Verhandlungen der Kaiserl.-Königl. zoologischen und botanischen Gesellschaft. 1888, 38. B., 3e et 4e parties; 1889, 39. B., 1re et 2e parties.

— Annalen des K.-K. naturhistorischen Hofmuseums. B. III, 4; B. IV, 1, 2, 3.

WASHINGTON. — Smithsonian Institution. 1886, 1re partie.

WIESBADEN. — Jahresberichte des Nassauischen Vereins für Naturkunde. 1888, 41, 42.

## II. — MÉMOIRES ORIGINAUX.

Anales del Ministerio de Fomento de la Republica Mexicana. Mexico, 1887. 1 vol. in-8°.

BARCENA Y MIGUEL PÉREZ (Mariano), Estudios de Meteorologia comparada. Tome I. Mexico, 1885. 1 vol. in-8°.

BARTHÉLEMY (F.), Recherches archéologiques sur la Lorraine avant l'histoire. Nancy, 1889. 1 vol. in-8°.

BERTHELOT, Collection des anciens alchimistes grecs, 4e livraison.

BOPPE (L.), Cours de technologie forestière.

— Traité de sylviculture.

COLLIGNON (Dr R.). — L'Inscription de Temia découverte par le capitaine Lefèvre. Contribution à l'étude des Aïnos. (Extrait de la *Revue d'ethnographie.*)

— Répartition de la couleur des yeux et des cheveux chez les Tunisiens sédentaires. (Extrait de la *Revue d'anthropologie.*)

DOUMET-ADANSON, Mission botanique exécutée en 1884 dans la région saharienne de la Tunisie.

FALLIÈRES et RENAN, Discours prononcés à la séance générlae du congrès des Sociétés savantes. Paris, 1889. 1 broch. in-8°.

KLOBB, Essai sur les lois des doubles décompositions chimiques. Paris, 1889. 1 vol. in-8°.

LA ROSA (Agustin de), Estudio de la filosofia y riqueza de la langua Mexicana. Guadalajara, 1889. 1 broch. in-8°.

LEFÈVRE (Capitaine) et COLLIGNON (Dr R.), La Couleur des yeux et des cheveux chez les Aïnos. (Extrait de la *Revue d'anthropologie.*)

MENEGHINI (Giuseppe), Commemorazione di .... fatta nell' aula magna dell' Università Pisana ai XXIV marzo MDCCCLXXXIX.

METZ-NOBLAT (A. de), Maniement et usage des armes à feu. Paris, 1889. 1 vol. in-16.

PACHECO (Général Carlos), Memoria presentada al congreso de la Union por el secretario de Estado y del Delpacho de Fomento, Colonization, Industria y Comercio de la Republica Mexicana. Mexico, 1885. 3 vol. in-4°.

SAINT-LAGER (Dr). — Vicissitudes onomastiques de la globulaire vulgaire. Paris, 1889. 1 broch. in-8°.

THOMAS (P.), Description des Échinides fossiles recueillis en 1885 et 1886 dans la région sud des hauts plateaux de la Tunisie.

— Description des mollusques fossiles des terrains tertiaires inférieurs de la Tunisie recueillis en 1885 et 1886. Paris, 1889. 2 broch. in-8°.

# TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE FASCICULE XXIII (TOME X, ANNÉE 1889).


Pages.

Liste des membres de la Société . . . . . v

1° Botanique.

Sur la maladie du *Peuplier pyramidal*, par M. Paul Vuillemin. . . . xvii

Observations relatives à la *Flore lichénique de la Lorraine*, par M. l'abbé Harmand . . . . . 15

Liste des *Desmidiées* observées dans quelques lacs des Vosges et aux environs d'Étival, par M. A. Lemaire . . . . . 27

2° Chimie.

Sur le *dédoublement des paratartrates*, par M. E. Bichat . . . . . 1

Sur la cyanacétophénone, l'orthométhylcyanacétophénone et l'éther ortholuylacétique. *Méthode générale de synthèse d'acides β acétoniques de la série aromatique*, par M. Haller . . . . . 155

Sur différents bornylphényluréthanes gauches, droites et racémiques, par M. Haller. . . . . 158

Modifications à apporter aux procédés généraux d'*analyse organique* dans quelques cas particuliers, par M. A. Held . . . . . 161

3° Mathématiques.

Étude de *Cinématique* à deux et trois dimensions, par M. A. Calinon. 56

4° Météorologie.

Note sur la *répartition moyenne des pluies* dans le département de Meurthe-et-Moselle, par M. C. Millot . . . . . xx, 11

5° Paléontologie végétale.

Note sur les *Tufs et les Tourbes de Lasnez*, près de Nancy, par M. Fliche . . . . . xix, 134

6° Physique.

Pages.

Sur un *Électromètre astatique* pouvant servir de Wattmètre, par MM. R. Blondlot et P. Curie . . . . . 148

7° Tératologie.

Observation d'un *cas tératologique* rare. Malformation des parois de la cavité buccale et de l'oreille moyenne chez un agneau nouveau-né, par MM. A. Nicolas et A. Prenant . . . . . 38

Sociétés correspondantes . . . . . 166
Liste des publications périodiques, mémoires et ouvrages reçus pendant l'année 1889 . . . . . 169
Table des matières . . . . . 173

Nancy, imprimerie Berger-Levrault et Cie.